TECHNISCHE UNIVERSITÄT GRAZ
INSTITUT FÜR ANALYSIS UND ZAHLENTHEORIE
Marc Technau

Wintersemester 2020/21
Graz, den 05.11.2020

5. Übung zur Einführung in die komplexe Analysis

5.1. *(Spiegelung, II)* (4 Punkte)
Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion mit $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$. Zeigen Sie $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

5.2. *(Eine interessante Ungleichung)* (4 Punkte)
Bestimmen Sie sämtliche nullstellenfreien, ganzen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, welche für alle $z \in \mathbb{C}$ der Ungleichung $|f(11z)| < 2020|f(z)|$ genügen.

5.3. *(Harmonische Funktionen)*
Im Folgenden wird mehrfach stillschweigend von der Identifikation $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ Gebrauch gemacht. Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend und $u \colon G \to \mathbb{R}$ *harmonisch*, d.h. u sei zwei mal stetig partiell differenzierbar und $u_{xx} + u_{yy}$ sei die Nullfunktion auf G. (Hier bezeichnen u_{xx} und u_{yy} die zweite partielle Ableitung von u nach der ersten respektive zweiten Variablen.) Ferner sei $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\operatorname{Re}(f)$ ist harmonisch.

(b) u lässt sich auf jeder offenen Kreisscheibe $B \subseteq G$ als Realteil einer holomorphen Funktion $F : B \to \mathbb{C}$ schreiben.
(Hinweis: Zeigen Sie, dass die Funktion $B \to \mathbb{C}$, $x + \mathrm{i}y \mapsto u_x(x, y) - \mathrm{i}u_y(x, y)$ holomorph ist und überlegen Sie sich, dass diese eine Stammfunktion besitzt.)

(c) Für alle Punkte $(x_0, y_0) \in G$ und $r < 0$ mit $\overline{B}(x_0 + \mathrm{i}y_0, r) \subseteq G$ ist

$$u(x_0, y_0) = \int_0^1 u(x_0 + r\cos(2\pi t), y_0 + r\sin(2\pi t))\,\mathrm{d}t.$$

(Hinweis: Korollar 3.1.)

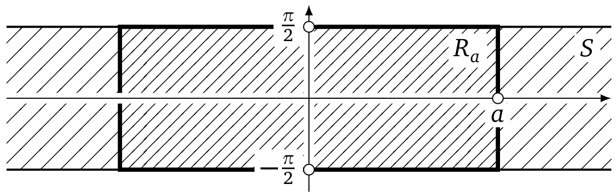
(d) u nimmt dann und nur dann ein globales Maximum auf G an, wenn u konstant ist.
(Hinweis: Zeigen Sie, dass $\{(x, y) \in G : u(x, y) = \sup u(G)\}$ abgeschlossen und offen zugleich ist.)

(e) $u_f : G \setminus f^{-1}(\{0\}) \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \log(|f(x + \mathrm{i}y)|^2)$, ist harmonisch.

(f) Es gilt $\max\limits_{z\in K}|f(z)| \le \max\limits_{z\in\partial K}|f(z)|$ für jede kompakte Menge $K \subset G$.

Geben Sie Ihre Lösung bitte digital bis zum 12.11.2020, 23:55 Uhr, im zugehörigen TeachCenter-Kurs ab. Dort und auf der Vorlesungswebseite finden Sie auch weitere Informationen.
`https://tc.tugraz.at/main/course/view.php?id=3113`
`https://www.math.tugraz.at/~mtechnau/teaching/2020-w-einf-kompl-analysis.html`

5.4. *(Maximumprinzip am konkreten Fall)*
Betrachten Sie die ganze Funktion $f = \exp \circ \exp$, das Rechteck $R_a := \{x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} : |x| \leq a \text{ und } |y| \leq \pi/2\}$ (mit $a > 0$), sowie den Streifen $S = R_\infty$:



(a) Bestimmen Sie das Maximum von $|f|$ auf R_a. Wo wird dieses angenommen?

(b) Zeigen Sie $\sup_{z \in \partial S} |f(z)| < \sup_{z \in S} |f(z)|$.

(c) Weshalb steht Teil (b) nicht im Widerspruch zu Aufgabe 5.3 (f)?