Technische Universität Graz
Institut für Analysis und Zahlentheorie
Marc Technau

Wintersemester 2020/21
Graz, den 12.11.2020

6. Übung zur Einführung in die komplexe Analysis

6.1. *(Lemma von Schwarz–Pick)* (4 Punkte)

$f, g\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ seien zwei holomorphe Selbstabbildungen der Einheitskreisscheibe $\mathbb{D} = B(0,1)$. Ferner sei $f(0) = 0$. Zeigen Sie:

(a) $|f(z)| \leq |z|$ für alle $z \in \mathbb{D}$ und $|f'(0)| \leq 1$.
(Hinweis: Heben Sie die isolierte Singularität von $h\colon \mathbb{D} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z)/z$, und benutzen Sie Korollar 3.14 mit $K = r\overline{\mathbb{D}}$ und $r \nearrow 1$.)

(b) Gilt $|f(z_0)| = |z_0|$ für ein $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ oder $|f'(0)| = 1$, so ist f eine Drehung (d.h. es ist $f = (z \mapsto \xi z)$ für ein geeignetes $\xi \in \partial\mathbb{D}$).

(c) Für $\eta \in \mathbb{D}$ bildet die Möbius-Transformation $T_\eta\colon z \mapsto \dfrac{z-\eta}{\overline{\eta}z - 1}$ die Einheitskreisscheibe biholomorph auf sich ab.

(d) Für $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ gilt

$$\left|\frac{g(z_1) - g(z_2)}{1 - \overline{g(z_1)}\,g(z_2)}\right| \leq \left|\frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_1}z_2}\right| \quad \text{und} \quad \frac{|g'(z)|}{1 - |g(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

(Hinweis: Wählen Sie geeignete Möbius-Transformationen T_ζ und T_ξ, sodass Sie Teil (a) auf $T_\zeta \circ g \circ T_\xi$ anwenden können.)

6.2. *(Ganz und Eins auf dem Einheitskreisrand)* (4 Punkte)

(a) Es sei f holomorph auf einer offenen Umgebung von $\overline{\mathbb{D}}$ und es gelte $|f(z)| = 1$ für alle $z \in \partial\mathbb{D}$. Zeigen Sie, dass f entweder konstant ist oder mindestens eine Nullstelle auf $\mathbb{D}$ besitzt.

(b) Bestimmen Sie alle ganzen Funktionen $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die $|f(z)| = 1$ für alle $z \in \partial\mathbb{D}$ erfüllen.
(Hinweis: Betrachten Sie Singularitäten von $z \mapsto 1/\overline{f(1/\overline{z})}$. Was hat das mit f zu tun?)

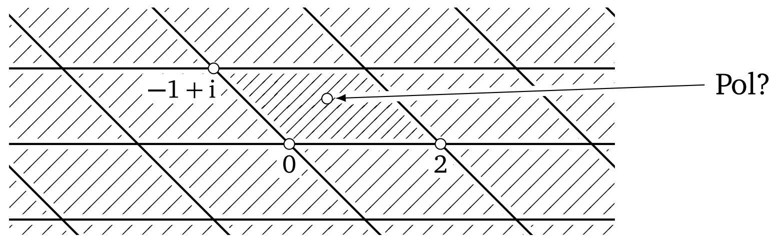
6.3. *(Vermischtes)*

(a) Es sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion mit $f(\mathrm{i}/n) = f(1 + \mathrm{i}/n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass f 1-periodisch ist (d.h. es gilt $f(z) = f(z+1)$ für alle $z \in \mathbb{C}$).

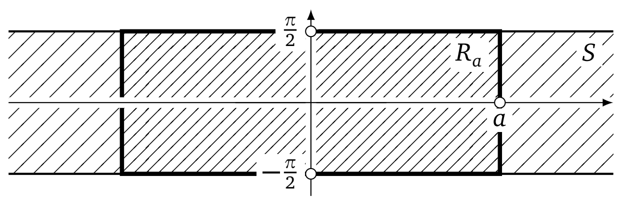
Geben Sie Ihre Lösung bitte digital bis zum 19.11.2020, 23:55 Uhr, im zugehörigen TeachCenter-Kurs ab. Dort und auf der Vorlesungswebseite finden Sie auch weitere Informationen.
`https://tc.tugraz.at/main/course/view.php?id=3113`
`https://www.math.tugraz.at/~mtechnau/teaching/2020-w-einf-kompl-analysis.html`

(b) Gibt es eine nullstellenfreie ganze Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(0) = 11$ und $|f(z)| \geq 2020$ für alle $z \in \partial\mathbb{D}$? (Falls ja, geben Sie eine solche an, falls nicht, beweisen Sie dies.)

(c) Es sei g meromorph auf $\mathbb{C}$ mit $g(z) = g(z+2) = g(z-1+\mathrm{i})$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass g entweder konstant ist oder mindestens einen Pol in $\mathbb{C}$ besitzt.



6.4. *(Eine Instanz des Phragmén–Lindelöf-Prinzips)*
Es sei $S = \{x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} : |y| \leq \frac{\pi}{2}\}$ der Streifen aus Aufgabe 5.4 und U bezeichne sein Inneres.



(a) Ferner sei $f : S \to \mathbb{C}$ stetig auf S und holomorph auf U und es mögen Konstanten $\alpha \in (0,1)$ und $A \in (0,\infty)$ existieren derart, dass

$$|f(x+\mathrm{i}y)| < \exp(A\exp(\alpha|x|))$$

für alle $x + \mathrm{i}y \in S$ gelte. Ferner sei f auf ∂S im Betrage durch 1 beschränkt. Zeigen Sie dann, dass f auf ganz S im Betrage durch 1 beschränkt ist.
(Anleitung: Betrachten Sie für $\beta \in (\alpha, 1)$ und $\epsilon > 0$ die schnell abfallende Hilfsfunktion $h_\epsilon : S \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \exp(-\epsilon(\exp(\beta z) + \exp(-\beta z)))$, zeigen Sie $|h(z)| \leq 1$ auf S und wenden Sie dann Korollar 3.14 auf $f h_\epsilon$ und eine geeignete kompakte Teilmenge von S an.)

(b) Bleibt die Aussage von Teil (a) richtig, wenn man $\alpha = 1$ zulässt?