Technische Universität Graz
Institut für Analysis und Zahlentheorie
Marc Technau

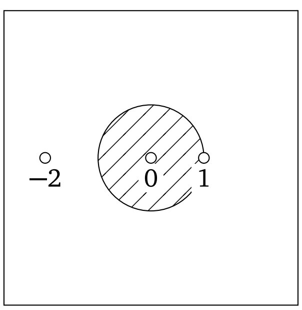
Wintersemester 2020/21
Graz, den 19.11.2020

7. Übung zur Einführung in die komplexe Analysis

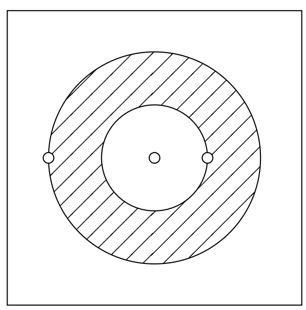
7.1. *(Konforme Automorphismen von $\mathbb{C}$)* (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass die biholomorphen Abbildungen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ genau die affin-linearen Abbildungen $z \mapsto az + b$ ($a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$) sind.
(Hinweis: Betrachten Sie zu gegebenem biholomorphen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die holomorphe Funktion $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto f(1/z)$, und zeigen Sie, dass g bei 0 einen Pol erster Ordnung besitzt.)

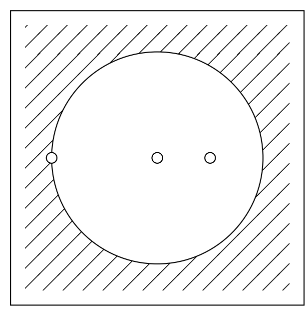
7.2. *(Laurentreihen)*
Es sei f die meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$, welche durch $z \mapsto \dfrac{9(z+1)}{(z-1)^2(z+2)}$ gegeben ist.

(a) Entwickeln Sie f auf den folgenden Kreisringen jeweils in eine dort konvergente Laurentreihe:



$\{ z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1 \}$,


$\{ z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2 \}$,


$\{ z \in \mathbb{C} : 2 < |z| \}$.

(b) In (a) haben Sie für verschiedene Kreisringe (hoffentlich) jeweils eine verschiedene Laurententwicklung von f erhalten. Weshalb steht dies nicht im Widerspruch zu Lemma 3.17, welches ja zu behaupten scheint, dass die Laurentkoeffizienten eindeutig seien?

7.3. *(Der étalé-Raum)* (4 Punkte)
Beweisen Sie Satz 4.1 aus der Vorlesung: Es sei $X = \dot{\bigcup}_{z\in\mathbb{C}} \mathscr{H}_z$ der étalé-Raum mit der Topologie, welche durch die Mengen $N(f, U) = \{ [(f, U)]_z : z \in U \}$ (mit $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathscr{H}(U)$) erzeugt wird. Ferner sei $\pi : X \to \mathbb{C}$, $[(f, U)]_z \mapsto z$, die bekannte Projektion. Dann gilt:

Geben Sie Ihre Lösung bitte digital bis zum 26.11.2020, 23:55 Uhr, im zugehörigen TeachCenter-Kurs ab. Dort und auf der Vorlesungswebseite finden Sie auch weitere Informationen.
`https://tc.tugraz.at/main/course/view.php?id=3113`
`https://www.math.tugraz.at/~mtechnau/teaching/2020-w-einf-kompl-analysis.html`

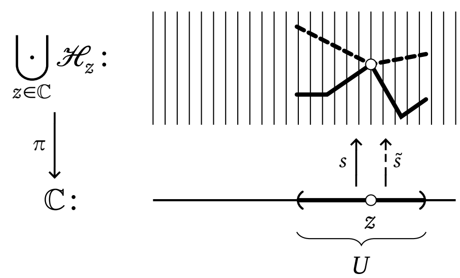
(a) Jeder stetige Schnitt[1] $s\colon U \to \dot{\bigcup}_{z\in\mathbb{C}} \mathscr{H}_z$ über offenem $U \subseteq \mathbb{C}$ kommt von einer holomorphen Funktion, d.h. für jedes solche s gibt es ein $f \in \mathscr{H}(U)$ mit $s = s_f$.

(b) Die auf X eingeführte Topologie ist die feinste Topologie derart, dass alle lokalen Schnitte $s_f : U \to X$ für alle offenen Mengen $U \subseteq \mathbb{C}$ und alle holomorphen Funktionen $f \in \mathscr{H}(U)$ stetig sind.

(c) X ist ein Hausdorff-Raum.

(d) π ist ein lokaler Homöomorphismus.

7.4. *(Stetige und unstetige Schnitte)*
Die folgende Abbildung zeigt zwei lokale Schnitte s (━━) und $\tilde{s}$ (╍╍) über einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{C}$:



Zeigen Sie, dass mindestens einer dieser beiden Schnitte unstetig ist.
(Hinweis: Hier ist es natürlich Teil der Aufgabe, sinnvoll zu interpretieren, welche Voraussetzungen an s und $\tilde{s}$ einem die Abbildung liefert.)

Generelle Hinweise: (1) Bitte beachten Sie, dass dieses Mal Lösungen zur *ersten* und *dritten* Aufgabe abzugeben sind. (2) Ferner sei darum gebeten, dass Sie bis zum 03.12.2020 Vorlesung und Übung auf TUGRAZ■online evaluieren.

[1]Mit „Schnitt“ sei hier gemeint, dass $\pi \circ s = \mathrm{id}_U$ gilt.