Technische Universität Graz
Institut für Analysis und Zahlentheorie
Marc Technau

Wintersemester 2020/21
Graz, den 26.11.2020

8. Übung zur Einführung in die komplexe Analysis

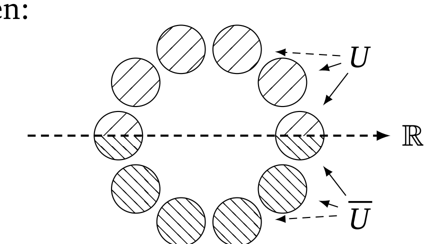
8.1. *(Schwarzsches Spiegelungsprinzip)* (4 Punkte)
Sei U eine in der Teilraumtopologie der abgeschlossenen oberen Halbebene $\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0 \}$ offene Menge. Wir setzen

$$U^\circ = \{ z \in U : \operatorname{Im} z > 0 \} \quad \text{und} \quad \overline{U} = \{ \overline{z} : z \in U \} = \{ x - \mathrm{i}y : x + \mathrm{i}y \in U \},$$

wobei $\overline{\cdot}$ hier die komplexe Konjugation bezeichne (und nicht etwa das Abschließen einer Menge in einer Topologie). Ferner sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine auf U stetige Funktion, die in U° holomorph ist und auf $U \cap \mathbb{R}$ reellwertig ist. Dann lässt sich f durch wie folgt zu einer auf $U \cup \overline{U}$ holomorphen Funktion $\tilde{f} : U \cup \overline{U} \to \mathbb{C}$ fortsetzen:

$$\tilde{f}(z) := \begin{cases} f(z) & \text{für } z \in U, \\ \overline{f(\overline{z})} & \text{für } z \in \overline{U}, \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} U \cup \overline{U} \arrow[dr, "\tilde{f}"] & \\ U \arrow[u, hook, "\text{Inkl.}"] \arrow[r, "f"'] & \mathbb{C}. \end{tikzcd}$$



(Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Morera (Satz 3.6).)

8.2. *(Fortsetzen funktioniert nicht immer)* (4 Punkte)
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine beliebige offene Menge, die den Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$, sowie einen Punkt $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ enthält. Dann besitzt die holomorphe Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, gegeben durch $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$, keine Fortsetzung zu einer auf U holomorphen Funktion; d.h. es gibt keine holomorphe Funktion $U \to \mathbb{C}$, welche das folgende Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{tikzcd} \{\zeta\} \arrow[r, hook, "\text{Inkl.}"] \arrow[d, hook, "\text{Inkl.}"] & U \arrow[dr, "\nexists\,(\text{holomorph})", "/\!/"'] & \\ \partial\mathbb{D} & \mathbb{D} \arrow[u, hook, "\text{Inkl.}"'] \arrow[r, "f"'] & \mathbb{C}. \end{tikzcd}$$

(Hinweis: Betrachten Sie $f(r \exp(2\pi \mathrm{i} x))$ für $x \in \mathbb{Q}$ und $r \nearrow 1$.)

8.3. *(Garbe von Halmen stetiger Funktionen)*
Für eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}$ sei $\mathscr{C}(U)$ die Menge aller stetigen Funktionen $f : U \to \mathbb{R}$.

Geben Sie Ihre Lösung bitte digital bis zum 03.12.2020, 23:55 Uhr, im zugehörigen TeachCenter-Kurs ab. Dort und auf der Vorlesungswebseite finden Sie auch weitere Informationen.
`https://tc.tugraz.at/main/course/view.php?id=3113`
`https://www.math.tugraz.at/~mtechnau/teaching/2020-w-einf-kompl-analysis.html`

Zwei Funktionselemente (f_1, U_1) und (f_2, U_2) mit $x \in U_1 \cap U_2$ sollen bei x äquivalent heißen (in Zeichen: $(f_1, U_1) \sim_x (f_2, U_2)$), wenn f_1 und f_2 auf einer offenen Umgebung $V \subseteq U_1 \cap U_2$ von x übereinstimmen. Wir definieren $\mathscr{C}_x$ als $\{(f, U) : U \subseteq \mathbb{R}$ offen, $x \in U$, $f \in \mathscr{C}(U)\}$ modulo dieser Äquivalenzrelation und betrachten $\mathscr{C} := \dot{\bigcup}_{x \in \mathbb{R}} \mathscr{C}_x$. Analog zur Diskussion von $\dot{\bigcup}_{z \in \mathbb{C}} \mathscr{H}_z$ aus der Vorlesung stattet man $\mathscr{C}$ nun mit der feinsten Topologie aus, bezüglich der alle Schnitte $s_f : U \to \mathscr{C}$, $x \mapsto [(f, U)]_x$, mit allen offenen $U \subseteq \mathbb{R}$ und allen $f \in \mathscr{C}(U)$ stetig sind.
Zeigen Sie, dass $\mathscr{C}$ kein Hausdorffraum ist (d.h. finden Sie zwei Punkte $[(f_1, U_1)]_{x_1}$ und $[(f_1, U_2)]_{x_1}$ in $\mathscr{C}$, für die es *keine* zwei offenen Umgebungen $V_1, V_2 \subseteq \mathscr{C}$ der jeweiligen Punkt gibt mit $V_1 \cap V_2 = \emptyset$).

8.4. *(Fortsetzen funktioniert trivialerweise, wenn man schon eine Fortsetzung hat)*
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f \in \mathscr{H}(U)$ und $z_0 \in U$. $\tilde{X}$ bezeichne die Menge aller Keime $\tilde{z}_1 = [(f_1, U_1)]_{z_1}$ derart, dass es einen Weg $\gamma : [0,1] \to U$ in U gibt, sodass $\tilde{z}_1$ durch analytische Fortsetzung von $[(f, U)]_{z_0}$ entlang γ entsteht. Zeigen Sie:

(a) $\tilde{X}$ ist offen in $\dot{\bigcup}_{z \in \mathbb{C}} \mathscr{H}_z$.

(b) $\tilde{X} = \{[(f, U)]_z : z \in U\}$. (Hinweis: Hier muss man ein wenig Tüfteln.)

(c) Die bekannte Projektion $\pi : \dot{\bigcup}_{z \in \mathbb{C}} \mathscr{H}_z \to \mathbb{C}$ ist eingeschränkt auf $\tilde{X}$ injektiv.

(d) Zu jedem Weg $\gamma : [0,1] \to U$ gibt es eine Hochhebung $\tilde{\gamma}$ bezüglich $\pi|_{\tilde{X}}$, also eine stetige Abbildung $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \tilde{X}$, welche das folgende Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "\pi|_{\tilde{X}}"] \\ {[0,1]} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[ur, dashed, "\exists\, \tilde{\gamma}"] & U . \end{tikzcd}$$