TECHNISCHE UNIVERSITÄT GRAZ
INSTITUT FÜR ANALYSIS UND ZAHLENTHEORIE
Marc Technau

Wintersemester 2020/21
Graz, den 03.12.2020

9. Übung zur Einführung in die komplexe Analysis

9.1. *(Beispiele für Überlagerungen)* (4 Punkte)
Beweisen Sie die in Beispiel 4.6 gemachten Aussagen, d.h. zeigen Sie:

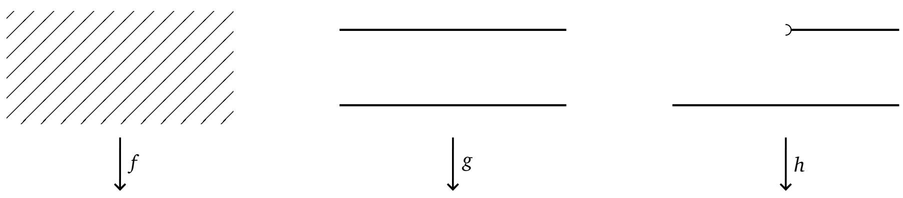
(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x$, ist *keine* Überlagerung.

(b) $g : \mathbb{R} \times \{1, 2\} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x$, ist eine Überlagerung.

(c) $h : (\mathbb{R} \times \{1\}) \cup (\{ x \in \mathbb{R} : x > 0 \} \times \{2\}) \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x$, ist *keine* Überlagerung.

(d) $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist eine Überlagerung (vgl. Abbildung 7 in Kapitel 1).

(e) $p_k : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z \mapsto z^k$, ist für $k \in \mathbb{N}$ eine Überlagerung (vgl. Abbildung 14 in Kapitel 3).



9.2. *(Überlagert der étalé-Raum die komplexen Zahlen?)* (4 Punkte)
Handelt es sich bei der Projektion $\pi : \dot\bigcup_{z\in\mathbb{C}} \mathscr{H}_z \to \mathbb{C}$ um eine Überlagerung?
(Hinweis: Selbstverständlich ist auch eine stichhaltige Begründung gefordert.)

9.3. *(Ableitungsüberlagerung)*
Beweisen Sie Lemma 4.8:

$$d : \dot\bigcup_{z\in\mathbb{C}} \mathscr{H}_z \to \dot\bigcup_{z\in\mathbb{C}} \mathscr{H}_z, \quad [(f, U)]_z \mapsto [(f', U)]_z,$$

ist eine Überlagerung.

9.4. *(Holomorphe Logarithmen)*
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f : U \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine nullstellenfreie holomorphe Funktion. Zeigen Sie, dass es eine *holomorphe Logarithmusfunktion zu*

Geben Sie Ihre Lösung bitte digital bis zum 10.12.2020, 23:55 Uhr, im zugehörigen TeachCenter-Kurs ab. Dort und auf der Vorlesungswebseite finden Sie auch weitere Informationen.
`https://tc.tugraz.at/main/course/view.php?id=3113`
`https://www.math.tugraz.at/~mtechnau/teaching/2020-w-einf-kompl-analysis.html`

f gibt, d.h. es gibt eine Funktion $L_f : U \to \mathbb{C}$, welche das folgende Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{C} \arrow[d, "\exp"] \\ U \arrow[ur, "L_f"] \arrow[r, "f"'] & \mathbb{C} \setminus \{0\}\,. \end{tikzcd}$$