Technische Universität Graz
Institut für Analysis und Zahlentheorie
Marc Technau

Wintersemester 2020/21
Graz, den 17.12.2020

10. Übung zur Einführung in die komplexe Analysis

10.1. *(Integration mittels analytischer Fortsetzung)* (4 Punkte)
Es sei $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ein geschlossener Weg in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $z_0 := \gamma(0) \in \mathbb{R}$ und $z_0 > 0$. Zu $k \in \mathbb{N}$ sei $[(\sqrt[k]{\cdot}, U)]_{z_0}$ derjenige Keim, der zu einer in einer Umgebung U von z_0 definierten holomorphen k-te-Wurzel-Funktion $\sqrt[k]{\cdot}$ gehöre, wobei $\sqrt[k]{z_0}$ reell und positiv sei. Bestimmen Sie dann das Integral

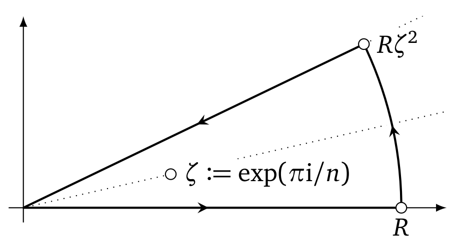
$$\int_\gamma \sqrt[k]{z}\,\mathrm{d}z := \int_\gamma [(\sqrt[k]{\cdot}, U)]_{z_0}$$

in Abhängigkeit von k, z_0 und der Windungszahl $\operatorname{Ind}_\gamma(0)$ von γ um 0.
(Hinweis: k-te Wurzeln kann man ja mittels Logarithmen ausdrücken und der Logarithmus ist irgendwie mit der Windungszahl verwandt.)

10.2. *(Anwendung des Residuensatzes, I)* (4 Punkte)
Es sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Betrachten Sie die auf $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion f gegeben durch $z \mapsto 1/(1+z^n)$ (wo der Nenner nicht Null ist).

(a) Berechnen Sie $\operatorname{Res}_f(z_0)$ für alle $z_0 \in \mathbb{C}$. (Hinweis: *fast* immer Null.)

(b) Bestimmen Sie das Integral $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$, indem Sie den Residuensatz auf den folgenden Weg γ_R anwenden und den Grenzübergang $R \to \infty$ durchführen:



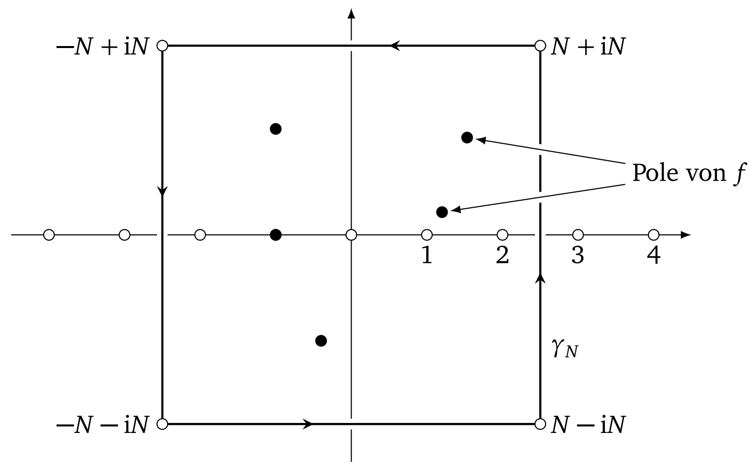
10.3. *(Anwendung des Residuensatzes, II)*
Es sei $\mathscr{P} \subseteq \mathbb{C}$ eine endliche Menge und $f : \mathbb{C} \setminus \mathscr{P} \to \mathbb{C}$ holomorph mit Polstellen in jedem Punkt $z_0 \in \mathscr{P}$. Ferner sei $z \mapsto z^2 f(z)$ sei beschränkt für alle $z \in \mathbb{C}$ außerhalb einer kompakten Menge. Zeigen Sie:

Geben Sie Ihre Lösung bitte digital bis zum 07.01.2021, 23:55 Uhr, im zugehörigen TeachCenter-Kurs ab. Dort und auf der Vorlesungswebseite finden Sie auch weitere Informationen.
https://tc.tugraz.at/main/course/view.php?id=3113
https://www.math.tugraz.at/~mtechnau/teaching/2020-w-einf-kompl-analysis.html

(a) $\displaystyle\lim_{\substack{N\to\infty \\ N\in\mathbb{N}+1/2}} \int_{\gamma_N} f(z)\pi\cot(\pi z)\,\mathrm{d}z = 0$; hier bezeichne γ_N die Parametrisierung eines geschlossenen, quadratischen Weges mit Endpunkten $\pm N \pm \mathrm{i}N$ (siehe unten). (Hinweis: Hier braucht man keine große Theorie, sondern im Wesentlichen nur die M–L-Abschätzung und die Definition des Cotangens $\cot(z) = \cos(z)/\sin(z)$.)

(b) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\mathscr{P}} f(n) = -\sum_{z_0\in\mathscr{P}} \mathrm{Res}_{z\mapsto f(z)\pi\cot(\pi z)}(z_0)$.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.



10.4. *($\int$ Wege $\rightsquigarrow$ $\int$ Polygonzüge)*
Beweisen Sie Lemma 5.3: Es sei Γ eine beliebige Kette in einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ und $f : U \to \mathbb{C}$ sei holomorph. Dann gibt es eine Kette $\Gamma_* = \lambda_1\gamma_1 + \ldots + \lambda_n\gamma_n$ derart, dass alle λ_k ($k = 1, \ldots, n$) Polygonzüge sind und die folgende Gleichung gilt:

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_*} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Hinweis: