TECHNISCHE UNIVERSITÄT GRAZ
INSTITUT FÜR ANALYSIS UND ZAHLENTHEORIE
Marc Technau

Wintersemester 2020/21
Graz, den 07.01.2021

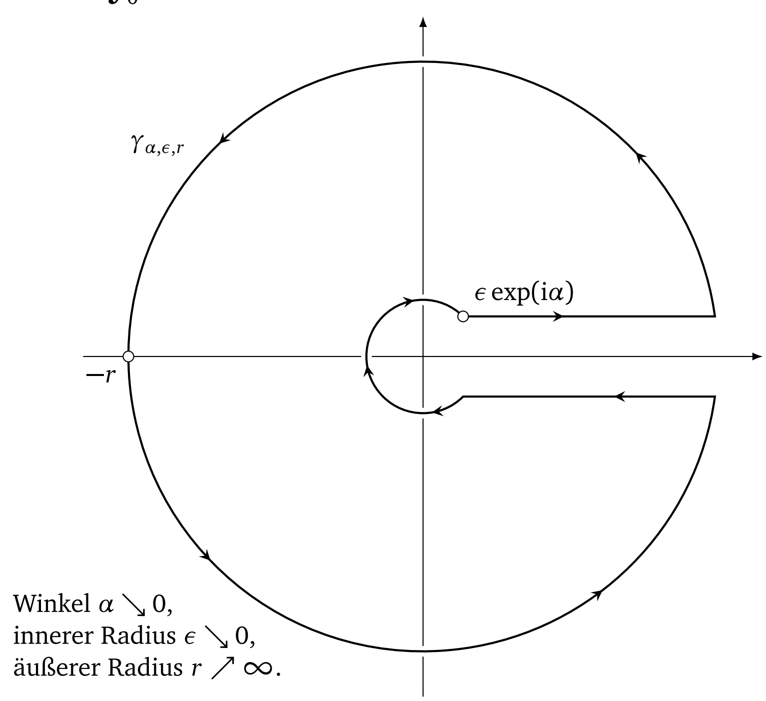
11. Übung zur Einführung in die komplexe Analysis

11.1. *(Integrale über* $[0,\infty)$ *und Pacman)* (4 Punkte)

Es sei $R \in \mathbb{C}(Z)$ eine rationale Funktion ohne Polstellen auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ und $z \mapsto |z^2 R(z)|$ sei beschränkt für alle z außerhalb einer geeigneten kompakten Menge. Ferner bezeichne $L\colon \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathscr{S}(\pi)$ die Umkehrfunktion von $\exp|_{\mathscr{S}(\pi)}\colon \mathscr{S}(\pi) \to \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_{\geq 0}$.

(a) Integrieren Sie $z \mapsto R(z)L(z)$ entlang des unten skizzierten Weges $\gamma_{\alpha,\epsilon,r}$, um mittels des Residuensatzes eine Formel für $\int_0^\infty R(x)\,\mathrm{d}x$ herzuleiten.
(Hinweis: Für $\alpha \searrow 0$ kann man auch einfach mittels analytischer Fortsetzung integrieren und sich so einige Abschätzungen sparen.)

(b) Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^3 - x^2 + 2}\,\mathrm{d}x$ durch Anwendung Ihrer Formel aus Teil (a).



Geben Sie Ihre Lösung bitte digital bis zum 14.01.2021, 23:55 Uhr, im zugehörigen TeachCenter-Kurs ab. Dort und auf der Vorlesungswebseite finden Sie auch weitere Informationen.
`https://tc.tugraz.at/main/course/view.php?id=3113`
`https://www.math.tugraz.at/~mtechnau/teaching/2020-w-einf-kompl-analysis.html`

11.2. *(Integrale mit Sinus und Kosinus über $[0, 2\pi]$)* (4 Punkte)

Es sei $R \in \mathbb{C}(X, Y)$ eine rationale Funktion in zwei Variablen, die keine Polstellen auf $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ besitzt.

(a) Geben Sie eine auf $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion f an, welche für alle $t \in \mathbb{R}$ der Gleichung $f(\exp(\mathrm{i}t))\mathrm{i}\exp(\mathrm{i}t) = R(\cos(t), \sin(t))$ genügt.

(b) Wenden Sie den Residuensatz geeignet auf das Integral

$$\int_0^{2\pi} R(\cos(t), \sin(t))\,\mathrm{d}t$$

an, um dieses als Summe von Residuen zu schreiben.

(c) Benutzen Sie die Resultate der vorherigen Teilaufgaben, um das Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin(t)\cos(t)}{\cos(t)^2 - \sin(t)^2 - 2\mathrm{i}\sin(t)\cos(t) - 4}\,\mathrm{d}t$$

zu berechnen.

11.3. *(Anwendung des Residuensatzes, III)*

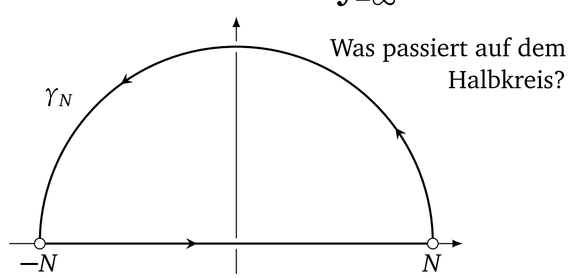
Es sei $R \in \mathbb{C}(Z)$ eine rationale Funktion ohne Polstellen auf $\mathbb{R}$ und der Grad des auftretenden Nenners sei gleich der Zählergrad plus Eins.

(a) Leiten Sie aus dem Residuensatz eine Formel für den folgenden Grenzwert her:

$$\lim_{N \to \infty} \int_{-N}^{N} R(x)\,\mathrm{d}x$$

(Hinweis: Integrieren Sie über den unten skizzierten Weg γ_N.)

(b) Existiert auch stets das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,\mathrm{d}x$?



11.4. *(Anwendungen vom Satz von Rouché)*

(a) Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen des Polynoms $Z^8 - 9Z^5 - 2Z + 1$ innerhalb der Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$.

(b) Benutzen Sie den Satz von Rouché, um (abermals) den Fundamentalsatz der Algebra (Satz 1.2) zu beweisen.

(c) Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Umgebung von $\overline{\mathbb{D}}$ und $f : U \to \mathbb{C}$ sei holomorph und erfülle $\max\{\,|f(z)| : z \in \partial\mathbb{D}\,\} < 1$. Zeigen Sie, dass es dann *genau ein* $z_0 \in \mathbb{D}$ mit $f(z_0) = z_0$ gibt.