TECHNISCHE UNIVERSITÄT GRAZ
INSTITUT FÜR ANALYSIS UND ZAHLENTHEORIE
Marc Technau

Wintersemester 2020/21
Graz, den 14.01.2021

12. Übung zur Einführung in die komplexe Analysis

12.1. *(Satz von Hurwitz)* (4 Punkte)

Beweisen Sie Satz 6.3: Es sei $(f_n)_n$ eine kompakt konvergente Folge holomorpher Funktionen $f_n \colon U \to \mathbb{C}$ auf einem Gebiet $U \subseteq \mathbb{C}$. Außerdem seien $a \in \mathbb{C}$ und $m \in \mathbb{N}$ gegeben und für jedes f_n sei die mit Vielfachheiten gezählte Anzahl von a-Stellen von f höchstens m. Dann ist die Anzahl der a-Stellen der Grenzfunktion f entweder auch höchstens m oder f ist konstant a.

12.2. *(Gleichmäßige Konvergenz)* (4 Punkte)

Es sei $(f_n)_n$ eine Folge ganzer Funktionen, die auf $\mathbb{C}$ gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ konvergiere. Zeigen Sie dann, dass für alle hinreichend großen n die Funktionen $f_n - f$ jeweils konstant sind.

(*Bemerkung*: Diese Aufgabe mag als Erklärung dafür dienen, weshalb man in der komplexen Analysis lieber mit *lokal* gleichmäßiger (äquivalent: kompakter) Konvergenz arbeitet.)

12.3. *(Die Gammafunktion)*

Wir betrachten die rechte Halbebene $H = \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0 \}$. Im Folgenden schreiben wir $t^z := \exp(\log(t)z)$ für reelle, positive t, wobei $\log(t)$ den üblichen reellen Logarithmus von t bezeichne. Beweisen Sie:

(a) Es gilt $\displaystyle\int_0^1 \exp(-t)t^{z-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n}$ für alle $z \in H$.
(Hinweis: Potenzreihendarstellung und $\int\sum = \sum\int$.)

(b) Die durch
$$\Gamma \colon H \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \int_0^\infty \exp(-t)t^{z-1}\,\mathrm{d}t$$
definierte Funktion ist holomorph.

(c) Γ lässt sich zu einer auf ganz $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N})$ holomorphen Funktion fortsetzen.

(d) Es gilt $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ für alle $z \in H$ und $\Gamma(1) = 1$.

Bei allen hier auftretenden Integralen sollten Sie sich auch kurz überlegen, weshalb diese existieren.

Geben Sie Ihre Lösung bitte digital bis zum 21.01.2021, 23:55 Uhr, im zugehörigen TeachCenter-Kurs ab. Dort und auf der Vorlesungswebseite finden Sie auch weitere Informationen.
`https://tc.tugraz.at/main/course/view.php?id=3113`
`https://www.math.tugraz.at/~mtechnau/teaching/2020-w-einf-kompl-analysis.html`

12.4. *(Die Riemannsche Zetafunktion)*
Potenzen und die Gamma-Funktion Γ seien wie in Aufgabe 12.3 definiert. Für $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > 1$ und reelle $t > 0$ definiere

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad \text{und} \quad \vartheta(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(-\pi n^2 t).$$

Zeigen Sie:

(a) $\zeta : \{ s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > 1 \} \to \mathbb{C}$ ist holomorph,

(b) $\displaystyle\int_0^\infty \exp(-\pi n^2 t) t^{(s/2)-1} \, \mathrm{d}t = \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) n^{-s}$,

(c) $\displaystyle\pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s) = \frac{1}{2} \int_0^\infty t^{(s/2)-1} (\vartheta(t) - 1) \, \mathrm{d}t.$

Bemerkung: Zusammen mit der Formel $\vartheta(t) = t^{-1/2} \vartheta(1/t)$ (die man mit Hilfe der Poissonschen Summenformel und Beispiel 2.13 beweisen kann) lässt sich nachweisen, dass die rechte Seite der Gleichung in Teil (c) invariant unter der Ersetzung $s \mapsto 1 - s$ ist. Damit kann man sich dann überlegen, dass sich $\zeta : \{ s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > 1 \} \to \mathbb{C}$ analytisch zu einer Funktion $\zeta : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$ fortsetzen lässt. Diese Funktion und die Mysterien ihrer Nullstellenverteilung im sogenannten *kritischen Streifen* $\{ z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re}(z) < 1 \}$ spielen eine fundamentale Rolle in der analytischen Zahlentheorie. Mehr dazu erfährt man in einschlägigen Spezialvorlesungen im Master-Studium.