Technische Universität Graz
Institut für Analysis und Zahlentheorie
Marc Technau

Wintersemester 2020/21
Graz, den 21.01.2021

13. Übung zur Einführung in die komplexe Analysis

13.1. *(Riemannscher Abbildungssatz, Eindeutigkeitsteil)* (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie

$$\{\phi : \mathbb{D} \to \mathbb{D} \text{ biholomorph}\} = \left\{ z \mapsto \xi \frac{z-\eta}{\overline{\eta} z - 1} : \xi \in \partial\mathbb{D},\, \eta \in \mathbb{D} \right\}.$$

(Hinweis: Aufgabe 6.1.)

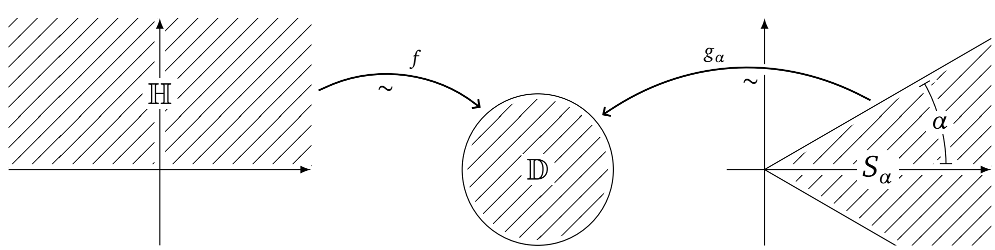
(b) Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $z_0 \in U$ beliebig. Zeigen Sie, dass es dann genau eine biholomorphe Abbildung $f : U \to \mathbb{D}$ mit $f(z_0) = 0$ gibt derart, dass $f'(z_0)$ reell und positiv ist.
(Hinweis: Die Existenz wurde schon in der Vorlesung gezeigt. Zum Beweis der Eindeutigkeit kann man einen Widerspruchsbeweis führen. Dabei hilft Teil (a).)

13.2. *(Biholomorphe Abbildungen, I)* (4 Punkte)
Es bezeichne $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$ die obere Halbebene und für $0 < \alpha \leq \pi$ sei $S_\alpha = \{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} : |\operatorname{Im}(\operatorname{Log}(z))| < \alpha\}$ ein Kreissektor. Bestimmen Sie

(a) eine biholomorphe Abbildung $f : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ mit $f(\mathrm{i}) = 0$ und $f'(\mathrm{i}) \in \mathbb{R}_{>0}$,

(b) eine biholomorphe Abbildung $g_\alpha : S_\alpha \to \mathbb{D}$.

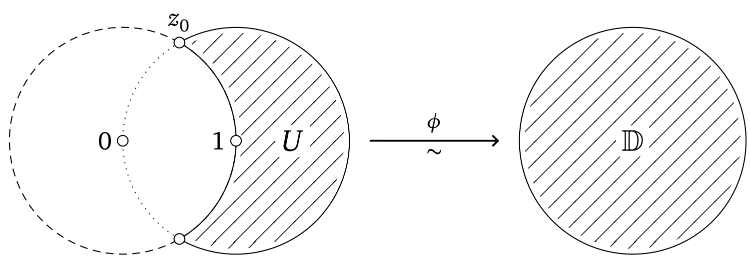
(Hinweis: Mit Möbius-Transformationen und Wurzeln kommt man zum Ziel. Zur Lösung von Teil (a) hilft es vielleicht, zuerst eine beliebige Möbius-Transformation zu bestimmen, die $\mathbb{H}$ biholomorph auf $\mathbb{D}$ abbildet.)



Geben Sie Ihre Lösung bitte digital bis zum 28.01.2021, 23:55 Uhr, im zugehörigen TeachCenter-Kurs ab. Dort und auf der Vorlesungswebseite finden Sie auch weitere Informationen.
`https://tc.tugraz.at/main/course/view.php?id=3113`
`https://www.math.tugraz.at/~mtechnau/teaching/2020-w-einf-kompl-analysis.html`

13.3. *(Biholomorphe Abbildungen, II)*

Bestimmen Sie eine biholomorphe Abbildung $\phi\colon U \to \mathbb{D}$ von $U = B(1,1) \setminus \overline{B}(0,1)$ auf die Einheitskreisscheibe $\mathbb{D} = B(0,1)$.



(Hinweis: Betrachten Sie das Bild von U unter der Möbius-Transformation $z \mapsto (z-z_0)^{-1}$. Falls man sich hier alle Details überlegen möchte, wird es ggf. aufwändig.)

13.4. *(Randverhalten biholomorpher Abbildungen)*

Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f : U \to \mathbb{D}$ biholomorph. Ferner sei $(z_n)_n$ eine Folge in U, die gegen einen Punkt auf dem Rand ∂U von U konvergiert.

(a) Zeigen Sie $\lim_{n\to\infty} |f(z_n)| = 1$.

(b) Geben Sie ein Beispiel an, welches belegt, dass $(f(z_n))_n$ i.Allg. nicht zu konvergieren braucht. (Hinweis: Aufgabe 13.2 (b) mit $\alpha = \pi$.)