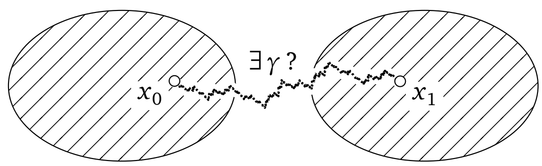
TECHNISCHE UNIVERSITÄT GRAZ
INSTITUT FÜR ANALYSIS UND ZAHLENTHEORIE
Marc Technau

Wintersemester 2020/21
Graz, den 09.10.2020

1. Tutorium zur Einführung in die komplexe Analysis

T1.1. *(Zusammenhang)*
Ein topologischer Raum X heißt bekanntlich *zusammenhängend*, falls sich dieser nicht als Vereinigung zweier nichtleerer, disjunkter, offener Teilmengen seiner selbst schreiben lässt. Ein topologischer Raum X heißt *wegzusammenhängend*, falls sich je zwei Punkte $x_0, x_1 \in X$ durch einen Weg verbinden lassen, d.h. falls es eine stetige Abbildung $\gamma\colon [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma(1) = x_1$ gibt. Zeigen Sie:

(a) Jeder wegzusammenhängende topologische Raum ist zusammenhängend.



(b) Jede zusammenhängende offene Menge $X \subseteq \mathbb{C}$ ist wegzusammenhängend und die verbindenden Wege können sogar als Parametrisierungen von Polygonzügen gewählt werden.

(c) $B(0,1) = \{\, z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \,\}$ ist zusammenhängend.

T1.2. *(Spuren von Wegen und deren Komplemente)*
Es sei $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ ein Weg und $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma([0,1])$ ein Punkt, der nicht im Bild von γ enthalten ist. Zeigen Sie, dass z_0 positiven Abstand zu $\gamma([0,1])$ hat, d.h. es gibt eine Kreisscheibe $B(z_0, r)$ um z_0 mit positivem Radius r und $B(z_0, r) \cap \gamma([0,1]) = \emptyset$.

T1.3. *(Kompakte Ausschöpfung)*
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Zeigen Sie, dass es eine *Ausschöpfung von U durch kompakte Mengen* gibt, also eine Folge $(K_n)_n$ von kompakten Mengen K_n derart, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge K_n im topologischen Inneren von K_{n+1} enthalten ist und $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ gilt.