TECHNISCHE UNIVERSITÄT GRAZ
INSTITUT FÜR ANALYSIS UND ZAHLENTHEORIE
Marc Technau

Wintersemester 2020/21
Graz, den 18.12.2020

2. Tutorium zur Einführung in die komplexe Analysis

T2.1. Bestimmen Sie für die folgenden Aussagen jeweils, ob diese wahr oder falsch sind und begründen Sie Ihre Entscheidung durch einen *Beweis* oder Angabe eines *Gegenbeispiels*. Im Folgenden sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ holomorph.

(a) Die komplexe Konjugation $\mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$, ist in jedem Punkt $z \neq 0$ komplex-differenzierbar.

(b) Es gibt eine holomorphe Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $g(\mathbb{D}) = \mathbb{R}$.

(c) Gilt $f(\exp(2\pi i x)) = \exp(-6\pi i x)$ für alle $x \in \mathbb{Q}$, so hat f in 0 einen Pol der Ordnung 3.

(d) Für jeden Integrationsweg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $t \mapsto \exp(2\pi i t)$, gilt $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \neq 0$.

T2.2. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihenentwicklung von

$$f : B(3+\mathrm{i}, 1) \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{z^5 - 1}{z^2 + 3z - 4},$$

im Entwicklungspunkt $3 + \mathrm{i}$.
(Hinweis: Dieser ist größer als 1; Ihr Ergebnis sollen Sie selbstverständlich begründen.)

T2.3. Es sei $\xi \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie

$$\lim_{T \to \infty} \int_{1-\mathrm{i}T}^{1+\mathrm{i}T} \frac{\exp(\xi z)}{z}\,\mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i} & \text{falls } \xi > 0, \\ 0 & \text{falls } \xi < 0. \end{cases}$$

(Hinweis: Integrieren Sie je nach $\xi > 0$ oder $\xi < 0$ über einen geschlossenen Weg, der sich entweder um 0 oder doch nicht um 0 windet.)

Die obigen Aufgaben wären Bestandteil des schriftlichen Tests am 02.12.2020 zur Übung gewesen. Die Bearbeitungszeit hätte etwa 90 Minuten betragen.