Technische Universität Graz
Institut für Analysis und Zahlentheorie
Marc Technau & Christian Elsholtz

Sommersemester 2021
Graz, den 05.03.2021

1. Übung zur Einführung in die Algebra

1.1. *(Fingerübungen)* (4 Punkte)
Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit neutralem Element 1. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Gilt $a \circ a = 1$ für alle $a \in G$, so ist G abelsch.

(b) Ist $M = \{ a \in G : a \circ a \circ a = 1 \}$ endlich, so ist $\# M$ ungerade.

1.2. *(Schwache Gruppenaxiome)*
Es sei G eine Menge, $\circ \colon G \times G \to G$ eine zweistellige Verknüpfung und $1 \in G$ ein fixiertes Element. Ferner mögen die folgenden Eigenschaften gelten:

$$\begin{cases} (1) & \forall a, b, c \in G\colon \quad (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c), \\ (2) & \forall a \in G\colon \quad a \circ 1 = a, \\ (3) & \forall a \in G \, \exists b \in G\colon a \circ b = 1. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass G mit $\circ$ eine Gruppe bildet.

(b) Zeigen Sie, dass die Aussage aus Teil (a) i.Allg. nicht gültig bleibt, wenn man (3) durch die folgende Eigenschaft (3') ersetzt:

$$(3') \quad \forall a \in G \, \exists b \in G\colon b \circ a = 1.$$

1.3. *(Ordnung von Elementen)*
Es sei $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ die Gruppe der reellen, invertierbaren 2×2-Matrizen zusammen mit der bekannten Matrixmultiplikation als Verknüpfung. Betrachten Sie

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{sowie} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\#\{ X^n : n \in \mathbb{N} \}$ für alle $X \in \{A, B, AB\}$.

1.4. *(Produkte: 'abstract nonsense')*
Es seien X und Y zwei Mengen und $X \times Y = \{ (x, y) : x \in X,\ y \in Y \}$ ihr kartesisches Produkt. Es sei $\pi_X \colon X \times Y \to X$ gegeben durch $\pi_X(x, y) = x$ und π_Y sei analog definiert.

Geben Sie Ihre Lösung bitte digital bis zum 12.03.2021, 10:00 Uhr, im zugehörigen TeachCenter-Kurs ab. Dort und auf der Vorlesungswebseite finden Sie auch weitere Informationen.
`https://tc.tugraz.at/main/course/view.php?id=352`
`https://www.math.tugraz.at/~mtechnau/teaching/2021-s-einf-algebra.html`

(a) Zeigen Sie, dass $X \times Y$ zusammen mit π_X und π_Y die folgende Eigenschaft erfüllt: Für je zwei Abbildungen $f_X : M \to X$ und $f_Y : M \to Y$ gibt es *genau eine* Abbildung $\gamma : M \to X \times Y$, die das folgende Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[d, dashed, "\exists!\,\gamma"'] \arrow[ddl, bend right, "f_X"'] \arrow[ddr, bend left, "f_Y"] & \\
& X \times Y \arrow[dl, "\pi_X"] \arrow[dr, "\pi_Y"'] & \\
X & & Y\,.
\end{tikzcd}$$

(Hinweis: ein Diagramm wie das obige heißt ***kommutativ***, falls je zwei Möglichkeiten von einer Stelle zu einer anderen entlang der gezeichneten Pfeile zu ‘laufen’ (und dabei die auf den Pfeilen notierten Abbildungen verkettend) dieselbe Abbildung vermitteln. Im vorliegenden Fall bedeutet dies $f_X \overset{!}{=} \pi_X \circ \gamma$ und $f_Y \overset{!}{=} \pi_Y \circ \gamma$.)

(b) Es sei Z eine weitere Menge zusammen mit zwei Abbildungen $p_X : Z \to X$ und $p_Y : Z \to Y$ derart, dass für jedes Tripel (M, f_X, f_Y) wie in (a) *genau eine* Abbildung $g : M \to Z$ existiert, welche das folgende Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[d, dashed, "\exists!\,g"'] \arrow[ddl, bend right, "f_X"'] \arrow[ddr, bend left, "f_Y"] & \\
& Z \arrow[dl, "p_X"] \arrow[dr, "p_Y"'] & \\
X & & Y\,.
\end{tikzcd}$$

Zeigen Sie dann, dass die so für $(M, f_X, f_Y) = (X \times Y, \pi_X, \pi_Y)$ erhaltene Abbildung $g : X \times Y \to Z$ eine Bijektion ist.
(Hinweis: probieren Sie, sich einen Kandidaten für eine Umkehrabbildung $Z \to X \times Y$ von g zu beschaffen.)