

2. Übung zur Einführung in die Algebra

2.1. (Untergruppen endlicher Gruppen) (4 Punkte)

- (a) Zeigen Sie: für eine endliche Gruppe (G, \circ) ist eine Teilmenge U von G genau dann eine Untergruppe von G , wenn 1_G in U enthalten ist und für je zwei Elemente $a, b \in U$ deren Produkt $a \circ b$ in U liegt.
- (b) Gilt die Aussage aus Teil (a) auch noch, wenn man von (G, \circ) nicht mehr voraussetzt endlich zu sein? (Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.)

2.2. (Turmsatz für den Index)

Es sei (G, \circ) eine Gruppe mit Untergruppen $V \leq U \leq G$. Ferner seien

$$G = \bigsqcup_n a_n U, \quad U = \bigsqcup_m b_m V,$$

disjunkte Zerlegungen von G und U in Linksnebenklassen. (Die Indizes i und j mögen hier jeweils geeignete Indextmengen durchlaufen.) Zeigen Sie:

- (a) $G = \bigsqcup_{n,m} a_n b_m V$.
- (b) $[G : V] = [G : U][U : V]$, falls G endlich ist.

2.3. (Zyklische Gruppen)

Es seien $n, m \in \mathbb{N}$; (C_n, \oplus) bezeichne die Gruppe aus Beispiel 1.1 (2). Ferner sei t ein Teiler von n . Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Das direkte Produkt $C_n \times C_m$ ist genau dann zyklisch, wenn n und m teilerfremd sind.
- (b) In C_n gibt es genau $\varphi(t)$ Elemente der Ordnung t . (Das ist Satz 1.13 (2).)

2.4. (Untergruppen von $(\mathbb{Z}, +)$) (4 Punkte)

Beweisen Sie Proposition 1.12:

- (a) Die Untergruppen von $(\mathbb{Z}, +)$ sind genau die Mengen $n\mathbb{Z} = \{nz : z \in \mathbb{Z}\}$ mit $n \in \mathbb{N}_0$.
- (b) Für $m, n \in \mathbb{Z}$ gilt: $m\mathbb{Z} \supseteq n\mathbb{Z} \iff m \mid n$. („Teilen heißt Enthalten.“)

Geben Sie Ihre Lösung bitte digital bis zum 19.03.2021, 10:00 Uhr, im zugehörigen TeachCenter-Kurs ab. Dort und auf der Vorlesungswebseite finden Sie auch weitere Informationen.

<https://tc.tugraz.at/main/course/view.php?id=352>

<https://www.math.tugraz.at/~mtechnau/teaching/2021-s-einf-algebra.html>