TECHNISCHE UNIVERSITÄT GRAZ
INSTITUT FÜR ANALYSIS UND ZAHLENTHEORIE
Marc Technau & Christian Elsholtz

Sommersemester 2021
Graz, den 19.03.2021

3. Übung zur Einführung in die Algebra

3.1. *(Untergruppenverbände und Homomorphismen)* (4 Punkte)
Bekanntlich induziert jeder Gruppenhomomorphismus $f : G \to G'$ Abbildungen

$$\{\text{Untergruppen } U \text{ von } G\} \underset{U' \mapsto f^{-1}(U')}{\overset{U \mapsto f(U)}{\rightleftarrows}} \{\text{Untergruppen } U' \text{ von } G'\}\,.$$

Finden Sie Gruppen G und G', sowie einen Gruppenhomomorphismus $f : G \to G'$ derart, dass es Untergruppen $U_1, U_2 \leq G$ und $U_1', U_2' \leq G'$ gibt, sodass f das folgende Abbildungsverhalten induziert:

$$\boxed{\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "f"] & G', \\
U_3 \arrow[r, mapsto, "\nexists"] & U_2' \arrow[dl] \\
U_2 \arrow[dr, shift left] & \\
U_1 \arrow[r, mapsto] & U_1' \arrow[ul, shift left] .
\end{tikzcd}}$$

D.h. es soll Folgendes gelten:

- $f(U_1) = U_1'$,
- $f^{-1}(U_1') = U_2 = f^{-1}(U_2')$,
- es gibt keine Untergruppe U_3 von G mit $f(U_3) = U_2'$.

3.2. *(Mehr zum Komplexprodukt)*
Seien U und V Untergruppen einer Gruppe G. Zeigen Sie:

(a) Die Menge UV ist genau dann eine Untergruppe von G, wenn $UV = VU$ gilt.

(b) Ist U ein Normalteiler von G, so gilt $\langle U \cup V \rangle = UV = VU$.

(c) Sind U und V endlich, so gilt $\#(UV) = \dfrac{\#U \cdot \#V}{\#(U \cap V)}$.

Geben Sie Ihre Lösung bitte digital bis zum 26.03.2021, 10:00 Uhr, im zugehörigen TeachCenter-Kurs ab. Dort und auf der Vorlesungswebseite finden Sie auch weitere Informationen.
`https://tc.tugraz.at/main/course/view.php?id=352`
`https://www.math.tugraz.at/~mtechnau/teaching/2021-s-einf-algebra.html`

3.3. *(Korrespondenzsatz)* (4 Punkte)

Beweisen Sie Satz 2.9: es sei G eine Gruppe, $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler von G und $\pi\colon G \to G/N$, $g \mapsto gN$, bezeichne die kanonische Projektion. Dann handelt es sich bei der Abbildung

$$^{\mathrm{a}}\pi\colon \begin{cases} \{\text{Untergruppen } U \leq G/N\} \to \{\text{Untergruppen } V \leq G \text{ mit } V \supseteq N\}, \\ \qquad\qquad U \mapsto \pi^{-1}(U), \end{cases}$$

um eine inklusionserhaltende[1] Bijektion, welche sich zu einer Bijektion

$$\{\text{Normalteiler } U \trianglelefteq G/N\} \xrightarrow{1:1} \{\text{Normalteiler } V \trianglelefteq G \text{ mit } V \supseteq N\}$$

einschränkt.

3.4. *(Semidirekte Produkte)*

Seien $(G, \bullet)$ und $(H, *)$ Gruppen und $\varphi\colon H \to \mathrm{Aut}(G)$ ein Gruppenhomomorphismus. Wir betrachten die binäre innere Verknüpfung

$$\star\colon (G \times H) \times (G \times H) \to G \times H, \quad ((g,h),(g',h')) \mapsto (g \bullet \varphi(h)(g'), h * h')$$

auf $G \times H$. Zeigen Sie:

(a) Die *Menge* $G \times H$ bildet zusammen mit $\star$ eine Gruppe, das sogenannte ***semidirekte Produkt von G mit H bezüglich φ***. (Man schreibt hierfür $G \rtimes_\varphi H$, um diese vom direkten Produkt $G \times H$ zu unterscheiden, oder kurz $G \rtimes H$, falls der Bezug auf φ klar ist.)

(b) Es sind $G \times \{1_H\} \trianglelefteq G \rtimes H$ und $\{1_G\} \times H \leq G \rtimes H$.

(c) $\{1_G\} \times H \trianglelefteq G \rtimes H$ genau dann wenn $\varphi(h) = \mathrm{id}_G$ für alle $h \in H$ ist, d.h. wenn φ der triviale Homomorphismus $H \to \mathrm{Aut}(G)$ ist.

(d) Ist $N \trianglelefteq G$ und $U \leq G$ mit $N \cap U = \{1_G\}$, so ist $NU \cong N \rtimes_\varphi U$ für $\varphi \in \mathrm{Hom}(U, \mathrm{Aut}(N))$ gegeben durch $\varphi(u) = n \mapsto unu^{-1}$.

[1] „*Inklusionserhaltend*" heißt hier: $U \leq U' \leq G/N$ impliziert $^{\mathrm{a}}\pi(U) \subseteq {}^{\mathrm{a}}\pi(U')$.