

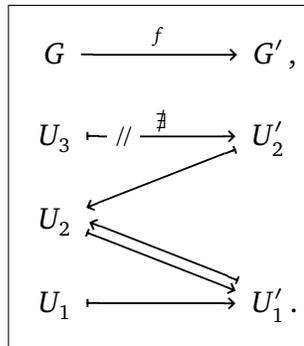
3. Übung zur Einführung in die Algebra

3.1. (Untergruppenverbände und Homomorphismen) (4 Punkte)

Bekanntlich induziert jeder Gruppenhomomorphismus $f : G \rightarrow G'$ Abbildungen

$$\{\text{Untergruppen } U \text{ von } G\} \begin{array}{c} \xrightarrow{U \mapsto f(U)} \\ \xleftarrow{U' \mapsto f^{-1}(U')} \end{array} \{\text{Untergruppen } U' \text{ von } G'\}.$$

Finden Sie Gruppen G und G' , sowie einen Gruppenhomomorphismus $f : G \rightarrow G'$ derart, dass es Untergruppen $U_1, U_2 \leq G$ und $U'_1, U'_2 \leq G'$ gibt, sodass f das folgende Abbildungsverhalten induziert:



D.h. es soll Folgendes gelten:

- $f(U_1) = U'_1$,
- $f^{-1}(U'_1) = U_2 = f^{-1}(U'_2)$,
- es gibt keine Untergruppe U_3 von G mit $f(U_3) = U'_2$.

3.2. (Mehr zum Komplexprodukt)

Seien U und V Untergruppen einer Gruppe G . Zeigen Sie:

- Die Menge UV ist genau dann eine Untergruppe von G , wenn $UV = VU$ gilt.
- Ist U ein Normalteiler von G , so gilt $\langle U \cup V \rangle = UV = VU$.
- Sind U und V endlich, so gilt $\#(UV) = \frac{\#U \cdot \#V}{\#(U \cap V)}$.

Geben Sie Ihre Lösung bitte digital bis zum 26.03.2021, 10:00 Uhr, im zugehörigen TeachCenter-Kurs ab. Dort und auf der Vorlesungswebseite finden Sie auch weitere Informationen.

<https://tc.tugraz.at/main/course/view.php?id=352>

<https://www.math.tugraz.at/~mtechnau/teaching/2021-s-einf-algebra.html>

3.3. (Korrespondenzsatz)

(4 Punkte)

Beweisen Sie Satz 2.9: es sei G eine Gruppe, $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler von G und $\pi: G \rightarrow G/N$, $g \mapsto gN$, bezeichne die kanonische Projektion. Dann handelt es sich bei der Abbildung

$${}^a\pi: \begin{cases} \{\text{Untergruppen } U \leq G/N\} \rightarrow \{\text{Untergruppen } V \leq G \text{ mit } V \supseteq N\}, \\ U \mapsto \pi^{-1}(U), \end{cases}$$

um eine inklusionserhaltende¹ Bijektion, welche sich zu einer Bijektion

$$\{\text{Normalteiler } U \trianglelefteq G/N\} \xrightarrow{1:1} \{\text{Normalteiler } V \trianglelefteq G \text{ mit } V \supseteq N\}$$

einschränkt.

3.4. (Semidirekte Produkte)

Seien (G, \bullet) und $(H, *)$ Gruppen und $\varphi: H \rightarrow \text{Aut}(G)$ ein Gruppenhomomorphismus. Wir betrachten die binäre innere Verknüpfung

$$\star: (G \times H) \times (G \times H) \rightarrow G \times H, \quad ((g, h), (g', h')) \mapsto (g \bullet \varphi(h)(g'), h * h')$$

auf $G \times H$. Zeigen Sie:

- Die Menge $G \times H$ bildet zusammen mit \star eine Gruppe, das sogenannte **semidirekte Produkt von G mit H bezüglich φ** . (Man schreibt hierfür $G \rtimes_{\varphi} H$, um diese vom direkten Produkt $G \times H$ zu unterscheiden, oder kurz $G \rtimes H$, falls der Bezug auf φ klar ist.)
- Es sind $G \times \{1_H\} \trianglelefteq G \rtimes H$ und $\{1_G\} \times H \leq G \rtimes H$.
- $\{1_G\} \times H \trianglelefteq G \rtimes H$ genau dann wenn $\varphi(h) = \text{id}_G$ für alle $h \in H$ ist, d.h. wenn φ der triviale Homomorphismus $H \rightarrow \text{Aut}(G)$ ist.
- Ist $N \trianglelefteq G$ und $U \leq G$ mit $N \cap U = \{1_G\}$, so ist $NU \cong N \rtimes_{\varphi} U$ für $\varphi \in \text{Hom}(U, \text{Aut}(N))$ gegeben durch $\varphi(u) = n \mapsto un u^{-1}$.

¹„Inklusionserhaltend“ heißt hier: $U \leq U' \leq G/N$ impliziert ${}^a\pi(U) \subseteq {}^a\pi(U')$.