TECHNISCHE UNIVERSITÄT GRAZ
INSTITUT FÜR ANALYSIS UND ZAHLENTHEORIE
Marc Technau & Christian Elsholtz

Sommersemester 2021
Graz, den 26.03.2021

4. Übung zur Einführung in die Algebra

4.1. *(Zweiter Isomorphiesatz)* (4 Punkte)
Beweisen Sie Satz 2.11: es sei G eine Gruppe, $U \leq G$ und $N \trianglelefteq G$. Dann ist auch $UN \leq G$ und $U \cap N \trianglelefteq U$ sowie $UN/N \cong U/(U \cap N)$.
Hinweis: für die gefragte Isomorphie, betrachten Sie das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen und Spalten, wobei die gezeichneten Pfeile die „offensichtlichen" Homomorphismen bedeuten sollen:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & U \cap N \arrow[r] \arrow[d] & U \arrow[r] \arrow[d] & U/(U \cap N) \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\exists ?"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & UN \arrow[r] & UN/N \arrow[r] & 0 .
\end{tikzcd}$$

Die hierin abgebildete Information reicht aber noch nicht ganz, um von der unteren Zeile „nach oben" zu „jagen".

4.2. *(Opponierte Gruppen und Rechtsoperationen)*
Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und M eine beliebige Menge. Zeigen Sie:

(a) Die Menge G bildet zusammen mit der Verknüpfung

$$\bullet \colon G \times G \to G, \quad (a, b) \mapsto b \circ a$$

eine Gruppe. (Diese Gruppe wird zur Abgrenzung von G auch mit G^{op} bezeichnet und heißt die ***opponierte Gruppe zu G***.)

(b) Die identische Abbildung $G^{\mathrm{op}} \to G$, $g \mapsto g$, ist genau dann ein Gruppenisomorphismus zwischen $(G^{\mathrm{op}}, \bullet)$ und $(G, \circ)$ wenn G abelsch ist.

(c) Es gilt $G^{\mathrm{op}} \cong G$ (sogar wenn G nicht abelsch ist).

(d) Übertragen Sie die Überlegungen aus Proposition 2.13, um eine Bijektion zwischen Gruppen-*Rechts*-Operationen $\triangleleft \colon M \times G \to M$ und $\mathrm{Hom}(G^{\mathrm{op}}, \mathrm{Sym}(M))$ zu gewinnen.

Geben Sie Ihre Lösung bitte digital bis zum 06.04.2021, 10:00 Uhr, im zugehörigen TeachCenter-Kurs ab. Dort und auf der Vorlesungswebseite finden Sie auch weitere Informationen.
`https://tc.tugraz.at/main/course/view.php?id=352`
`https://www.math.tugraz.at/~mtechnau/teaching/2021-s-einf-algebra.html`

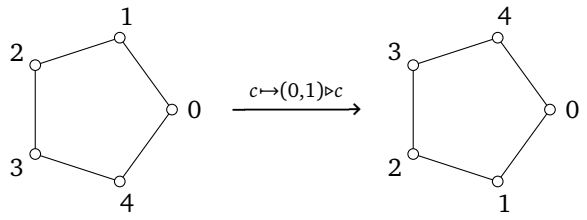
4.3. *(Diedergruppen)*
Im Folgenden sei $n \geq 3$. Ferner bezeichne $\varphi\colon C_2 \to \mathrm{Aut}(C_n)$ den Gruppenhomomorphismus mit $\varphi(0) = \mathrm{id}_{C_n}$ und $\varphi(1) = (x \mapsto -x) \in \mathrm{Aut}(C_n)$.

(a) Es sei $D_{2n} := C_n \rtimes_\varphi C_2$ das semidirekte Produkt von C_n mit C_2 bezüglich φ aus Teil (a) zusammen mit der Verknüpfung $\star$ (vgl. Aufgabe 3.4). Zeigen Sie, dass D_{2n} via

$$(a, b) \triangleright c := \text{erste Koordinate von } ((a, b) \star (c, 0))$$

treu und transitiv auf C_n operiert.

(b) Beschriften Sie für $n \in \{4, 5\}$ die Seiten eines regelmäßigen n-Ecks der Reihe nach mit den Elementen $0, 1, \ldots, n-1$ von C_n und skizzieren Sie, wie die Elemente von D_{2n} darauf operieren, zum Beispiel für das Element $(0, 1) \in D_{2n}$:



(c) Interpretieren Sie (für beliebige $n \geq 3$) die Operation von D_{2n} auf C_n geometrisch.

4.4. *(Anwendung der Bahnformel)* (4 Punkte)
Eine Gruppe G der Ordnung 55 operiere auf einer Menge M mit genau 18 Elementen. Zeigen Sie, dass diese Operation mindestens zwei Fixpunkte besitzt.
(Hinweis: • | • | • • • • • | • • • • • • • • • • • .)

Hinweis: beachten Sie den wegen der Osterferien verlängerten Bearbeitungszeitraum.