TECHNISCHE UNIVERSITÄT GRAZ
INSTITUT FÜR ANALYSIS UND ZAHLENTHEORIE
Marc Technau & Christian Elsholtz

Sommersemester 2021
Graz, den 16.04.2021

5. Übung zur Einführung in die Algebra

5.1. *(Struktur von (kleinen) p-Gruppen)* (4 Punkte)
In dieser Aufgabe soll Korollar 2.20 bewiesen werden. G bezeichne eine endliche Gruppe, p sei eine Primzahl und n sei eine natürliche Zahl. Zeigen Sie dann die folgenden Aussagen:

(a) Hat G Ordnung p^n, so hat G ein nichttriviales Zentrum: $Z(G) \supsetneq \{1_G\}$.
(Hinweis: benutzen Sie die Klassengleichung, Korollar 2.19.)

(b) Ist $G/Z(G)$ zyklisch, so ist G abelsch.

(c) Ist $N \leq G$ mit $[G:N] = 2$, so ist $N \trianglelefteq G$.

(d) Hat G Ordnung p^2, so ist G abelsch und es gilt $G \cong C_{p^2}$ oder $G \cong C_p \times C_p$.

5.2. *(Färbungen eines Quadrats)* (4 Punkte)
Die Gruppen C_4 und $D_{2\cdot 4}$ operieren auf den Ecken E eines Quadrats durch Drehung bzw. Drehung und Spiegelung (vgl. das Beispiel über Satz 2.16, sowie Aufgabe 4.3).

(a) Bestimmen Sie die Anzahl der verschiedenen Färbungen von E mit drei[1] Farben unter der Operation von C_4.

(b) Bestimmen Sie die Anzahl der verschiedenen Färbungen von E mit drei Farben unter der Operation von $D_{2\cdot 4}$.

(c) Geben Sie zwei Färbungen von E mit drei Farben an, welche unter der Operation von C_4 zu verschiedenen Bahnen gehören, aber bezüglich der Operation von $D_{2\cdot 4}$ in derselben Bahn liegen.

5.3. *(Einige Automorphismengruppen)*
Bestimmen Sie zu jeder der folgenden Gruppen jeweils eine „bekannte" Gruppe, zu welcher diese isomorph ist:

(a) $\mathrm{Aut}(C_2)$,

(b) $\mathrm{Aut}(C_4)$,

(c) $\mathrm{Aut}(C_2 \times C_2)$. (Hinweis: hier gilt $\#\mathrm{Aut}(C_2 \times C_2) > 4 = \#(C_2 \times C_2)$.)

Geben Sie Ihre Lösung bitte digital bis zum 23.04.2021, 10:00 Uhr, im zugehörigen TeachCenter-Kurs ab. Dort und auf der Vorlesungswebseite finden Sie auch weitere Informationen.
`https://tc.tugraz.at/main/course/view.php?id=352`
`https://www.math.tugraz.at/~mtechnau/teaching/2021-s-einf-algebra.html`

[1] Färbungen, bei denen nicht alle drei Farben wirklich benutzt werden, sollen hier ebenfalls gezählt werden.

5.4. *(Gruppen der Ordnung* 12*)*

(a) Zeigen Sie, dass jede Gruppe G der Ordnung 12 einen Normalteiler $N \neq \{1_G\}, G$ besitzt. (Hinweis: wie viele Sylowgruppen haben in G überhaupt Platz?)

(b) Es bezeichne P_2 eine 2-Sylowgruppe von G und P_3 sei eine 3-Sylowgruppe von G. Geben Sie für jeden der folgenden drei Fälle ein Beispiel (mit Begründung!) für eine Gruppe G mit Ordnung 12 und den geforderten Eigenschaften an:

$$(1)\ \ P_2 \trianglelefteq G \text{ und } P_3 \trianglelefteq G, \quad (2)\ \ P_2 \trianglelefteq G \text{ und } P_3 \ntrianglelefteq G, \quad (3)\ \ P_2 \ntrianglelefteq G \text{ und } P_3 \trianglelefteq G.$$