Technische Universität Graz
Institut für Analysis und Zahlentheorie
Marc Technau & Christian Elsholtz

Sommersemester 2021
Graz, den 23.04.2021

6. Übung zur Einführung in die Algebra

6.1. *(Erzeugen von $\mathfrak{S}_n$)* (4 Punkte)

Es sei $n \geq 2$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\mathfrak{S}_n = \langle (1\,2), (1\,3), \ldots, (1\,n) \rangle$;

(b) $\mathfrak{S}_n = \langle (1\,2), (2\,3), (3\,4), \ldots, ((n-1)\,n) \rangle$;

(c) $\mathfrak{S}_n = \langle \sigma, \tau \rangle$ mit $\sigma = (1\,2\,3\,\ldots\,n)$ und $\tau = (1\,2)$;

(d) Ist n prim, so kann man in (c) sogar $\tau = (r\,s)$ mit beliebigen $1 \leq r < s \leq n$ wählen.

(Hinweis: benutzen Sie, dass $\mathfrak{S}_n$ von allen Transpositionen erzeugt wird; Konjugation könnte helfen. Falls Sie noch keine richtige Idee haben, mag es helfen, für $n = 4$ oder $n = 5$ konkrete Rechnungen anzustellen.)

6.2. *(A_n ist einfach für $n \geq 5$)*

Es bezeichne A_n die alternierende Gruppe in $\mathfrak{S}_n = \mathrm{Sym}(\{1, \ldots, n\})$. Zeigen Sie:

(a) Für $n \geq 3$ wird A_n von den 3-Zyklen erzeugt.
(Hinweis: welche Zyklen entstehen als das Produkt zweier Transpositionen?)

(b) Für $n \geq 5$ sind alle 3-Zyklen konjugiert in A_n.
(Hinweis: die fragliche Konjugiertheit in $\mathfrak{S}_n$ ist *a-priori* einfacher einzusehen. Kann man daraus nun die Konjugiertheit in A_n gewinnen? Beachten Sie, dass die Voraussetzung $n \geq 5$ einem zu jedem 3-Zyklus zwei permutierbare Zahlen zur Verfügung stellt, die nicht in selbigem 3-Zyklus vorkommen.)

(c) Satz 4.6: für $n \geq 5$ ist A_n einfach.
(Hinweis: sei $N \neq \{\mathrm{id}_{\{1,\ldots,n\}}\}$ ein Normalteiler von A_n. Betrachten Sie ein Element $\sigma \neq \mathrm{id}_{\{1,\ldots,n\}}$ von N, welches maximal viele Elemente von $\{1, \ldots, n\}$ fixiert, und zeigen Sie dann, dass σ ein 3-Zyklus sein muss. Hierbei hilft es erneut, in disjunkte Zyklen zu zerlegen. Folgen Sie anschließend $N = A_n$.)

6.3. *(Gruppen der Ordnung 72 und Einfachheit)*

Zeigen Sie, dass es keine einfache Gruppe G mit Ordnung 72 gibt.
(Hinweis: falls die Anzahlbetrachtung der Sylowgruppen von G nicht ausreichen, betrachten Sie die Operation von G auf $\mathrm{Syl}_3\,G$ durch Konjugation. Kann diese Operation treu sein?)

Geben Sie Ihre Lösung bitte digital bis zum 30.04.2021, 10:00 Uhr, im zugehörigen TeachCenter-Kurs ab. Dort und auf der Vorlesungswebseite finden Sie auch weitere Informationen.
`https://tc.tugraz.at/main/course/view.php?id=352`
`https://www.math.tugraz.at/~mtechnau/teaching/2021-s-einf-algebra.html`

6.4. *(Größter gemeinsamer Teiler und kleinstes gemeinsames Vielfaches)* (4 Punkte)
Es seien $a, b, m, n \in \mathbb{N}_0$ beliebig mit $a \mid b$.

(a) Zeigen Sie $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = \mathrm{ggT}(m,n)\mathbb{Z}$ und $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} = \mathrm{kgV}(m,n)\mathbb{Z}$.

(b) Benutzen Sie Satz 2.12, um $\#(a\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}) = b/a$ zu zeigen.

(c) Benutzen Sie Satz 2.11, um $\mathrm{ggT}(m,n)\,\mathrm{kgV}(m,n) = mn$ zu zeigen.