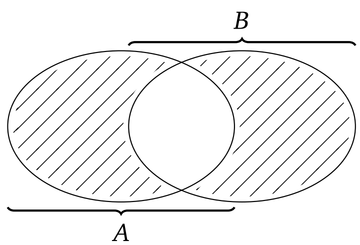
Technische Universität Graz
Institut für Analysis und Zahlentheorie
Marc Technau & Christian Elsholtz

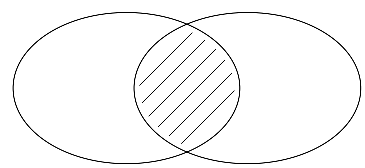
Sommersemester 2021
Graz, den 30.04.2021

7. Übung zur Einführung in die Algebra

7.1. *(Potenzmengen als Ringe)* (4 Punkte)
Es sei M eine beliebige Menge und $\mathscr{P}(M)$ die Potenzmenge von M (d.h. die Menge aller Teilmengen von M). Wir definieren auf $\mathscr{P}(M)$ eine Addition und eine Multiplikation wie folgt: für $A, B \in \mathscr{P}(M)$ sei

$$A + B := (A \cup B) \setminus (A \cap B), \qquad A \cdot B := A \cap B.$$





(a) Zeigen Sie, dass $\mathscr{P}(M)$ mit den soeben definierten Verknüpfungen einen kommutativen Ring bildet.

(b) Bestimmen Sie $0_{\mathscr{P}(M)}$ und $1_{\mathscr{P}(M)}$.

(c) Für welche Mengen M ist $\mathscr{P}(M)$ ein Körper?

(d) (*Zusatz*; wird nicht korrigiert, soll aber in der Übungsstunde besprochen werden:) Bestimmen Sie die Ideale $\mathfrak{a}$ von $\mathscr{P}(M)$. Können Sie die Struktur der Faktorringe $\mathscr{P}(M)/\mathfrak{a}$ näher beschreiben?

7.2. *(Einheitengruppe von $\mathbb{Z}/2^\nu\mathbb{Z}$)*
Es sei $\nu \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ und $(\mathbb{Z}/2^\nu\mathbb{Z})^\times$ bezeichne die Einheitengruppe des Rings $\mathbb{Z}/2^\nu\mathbb{Z}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ mit $5^{2^{\nu-2}} = 1 + m2^\nu$. (Hinweis: Induktion über ν.)

(b) Für $\nu \geq 2$ liegt $5 \bmod 2^\nu$ in $(\mathbb{Z}/2^\nu\mathbb{Z})^\times$ und hat die Ordnung $2^{\nu-2}$.

(c) Für $\nu \geq 2$ ist $(\mathbb{Z}/2^\nu\mathbb{Z})^\times \cong C_2 \times C_{2^{\nu-2}}$.
(Hinweis: finden Sie zunächst zwei verschiedene Elemente von $(\mathbb{Z}/2^\nu\mathbb{Z})^\times$ mit Ordnung 2. Überlegen Sie sich dann, welche Möglichkeiten für $q_1, \dots, q_t$ in Satz 5.3 im vorliegenden Fall in Frage kommen.)

Geben Sie Ihre Lösung bitte digital bis zum 07.05.2021, 10:00 Uhr, im zugehörigen TeachCenter-Kurs ab. Dort und auf der Vorlesungswebseite finden Sie auch weitere Informationen.
`https://tc.tugraz.at/main/course/view.php?id=352`
`https://www.math.tugraz.at/~mtechnau/teaching/2021-s-einf-algebra.html`

7.3. *(Endliche Integritätsbereiche sind Körper)* (4 Punkte)

R sei ein ***Integritätsbereich***, d.h. ein kommutativer Ring ungleich dem Nullring, sodass für alle $a, b \in R$ aus $ab = 0_R$ schon $a = 0_R$ oder $b = 0_R$ folgt.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $a \in R \setminus \{0_R\}$ die Abbildung $R \to R$, $b \mapsto ab$, injektiv ist.

(b) Folgern Sie: ist $\#R < \infty$, so ist R ein Körper.

7.4. *(Operationen mit Idealen)*

Es seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei Ideale eines Rings R. Betrachten Sie das *Komplexprodukt* $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} := \{ab : a \in \mathfrak{a},\ b \in \mathfrak{b}\}$, sowie das ***Idealprodukt*** $\mathfrak{a}\mathfrak{b} := \langle \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \rangle$ von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$.

(a) Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass $\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2$ im Allgemeinen kein Ideal von R zu sein braucht.

(b) Zeigen Sie $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ und zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass hierbei strikte Inklusion „$\subset$“ gelten kann.

(c) Zeigen Sie: gilt $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = R$ und ist R kommutativ, so ist $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$.