TECHNISCHE UNIVERSITÄT GRAZ
INSTITUT FÜR ANALYSIS UND ZAHLENTHEORIE
Marc Technau & Christian Elsholtz

Sommersemester 2021
Graz, den 28.05.2021

10. Übung zur Einführung in die Algebra

10.1. *(Lokalisierung)* (4 Punkte)

Betrachten Sie das multiplikative System $S = \{ 2^n : n \in \mathbb{N}_0 \}$ in $\mathbb{Z}$.

(a) Zeigen Sie: $S^{-1}\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] := \{ \frac{a}{2^n} \in \mathbb{Q} : a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_0 \}$.

(b) Bestimmen Sie alle Ideale von $S^{-1}\mathbb{Z}$.

(c) Bestimmen Sie den Quotientenkörper $\operatorname{Quot}(S^{-1}\mathbb{Z})$ von $S^{-1}\mathbb{Z}$.

10.2. *(Irreduzibilität von Polynomen mit kleinem Grad)*

K sei ein beliebiger Körper und $f \in K[X]$ ein Polynom mit Grad n.

(a) Ist $n = 1$, so ist f irreduzibel.

(b) Ist $n \in \{2, 3\}$, so ist f genau dann irreduzibel, wenn f keine Nullstelle in K besitzt.

10.3. *(Normen)* (4 Punkte)

Es sei $d \neq 1$ eine ***quadratfreie*** ganze Zahl, d.h. es gibt kein $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ mit $n^2 \mid d$. Mit $\sqrt{d}$ sei eine beliebige komplexe Nullstelle des Polynoms $X^2 - d$ bezeichnet. (Die zweite solche Nullstelle ist dann $-\sqrt{d}$.) Es sei $\vartheta = \sqrt{d}$ falls $d \equiv 2, 3 \bmod 4$ und $\vartheta = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{d})$ falls $d \equiv 1 \bmod 4$. (Der Fall $d \equiv 0 \bmod 4$ kann wegen Quadratfreiheit von d nicht eintreten.) $\mathbb{Z}[\vartheta]$ bezeichne den kleinsten Teilring von $\mathbb{C}$, der $\mathbb{Z}$ und ϑ enthält. $\mathbb{Q}[\vartheta]$ sei analog definiert.

(a) Zeigen Sie $\vartheta \notin \mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}[\vartheta] = \{ a + b\vartheta \in \mathbb{C} : a, b \in \mathbb{Z} \}$ und $\mathbb{Q}[\vartheta] = \{ a + b\vartheta \in \mathbb{C} : a, b \in \mathbb{Q} \}$.

(b) Bestimmen Sie für $a, b \in \mathbb{Z}$ die Darstellungsmatrix $A_{a+b\vartheta}$ der $\mathbb{Q}$-linearen Abbildung $\mathbb{Q}[\vartheta] \to \mathbb{Q}[\vartheta]$, $x \mapsto (a + b\vartheta)x$, bezüglich der $\mathbb{Q}$-Basis $1, \vartheta$ von $\mathbb{Q}[\vartheta]$.

(c) Zeigen Sie, dass $\det(A_{a+b\vartheta})$ für $a, b \in \mathbb{Z}$ eine ganze Zahl ist und die Abbildung $N \colon \mathbb{Z}[\vartheta] \to \mathbb{Z}$, $y \mapsto \det(A_y)$, multiplikativ ist (d.h. $N(xy) = N(x)N(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{Z}[\vartheta]$).

(d) Zeigen Sie: $x \in (\mathbb{Z}[\vartheta])^\times \iff N(x) \in \mathbb{Z}^\times = \{\pm 1\}$.

10.4. *(Nicht-prime irreduzible Elemente)*

Betrachten Sie den Ring $R := \mathbb{Z}[\mathrm{i}\sqrt{5}] = \{ a + \mathrm{i}\sqrt{5}b \in \mathbb{C} : a, b \in \mathbb{Z} \}$. (Die Ringaxiome nachzurechnen ist hier nicht gefordert.) Zeigen Sie dann, dass es sich bei

$$2 \cdot 3 = (1 + \mathrm{i}\sqrt{5}) \cdot (1 - \mathrm{i}\sqrt{5}),$$

Geben Sie Ihre Lösung bitte digital bis zum 04.06.2021, 10:00 Uhr, im zugehörigen TeachCenter-Kurs ab. Dort und auf der Vorlesungswebseite finden Sie auch weitere Informationen.
`https://tc.tugraz.at/main/course/view.php?id=352`
`https://www.math.tugraz.at/~mtechnau/teaching/2021-s-einf-algebra.html`

um zwei Zerlegungen von $6 \in R$ in Produkte irreduzibler Elemente handelt, aber die darin vorkommenden Elemente keine Primelemente in R sind.
(Hinweis: betrachten Sie die Funktion $N: R \to \mathbb{Z}$ aus Aufgabe 10.3; wegen $N(xy) = N(x)N(y)$ für alle $x, y \in R$ lässt sich damit Teilbarkeit in R auf Teilbarkeit in $\mathbb{Z}$ zurückführen.)

Hinweis: es ist noch bis zum 30.05.2021 möglich, Vorlesung und Übungen in TUGRAZonline zu evaluieren.