TECHNISCHE UNIVERSITÄT GRAZ
INSTITUT FÜR ANALYSIS UND ZAHLENTHEORIE
Marc Technau

Wintersemester 2021
Graz, den 08.10.2021

2. Übung zur Algebra

2.1. *(Rechnen mit Potenzbasen)*
Wir betrachten die Körpererweiterung $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$ und $x \in \mathbb{C}$. Dann bezeichne $\mathbb{Q}(x)$ den kleinsten Zwischenkörper von $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$, der x enthält. Im Folgenden sei x eine beliebige komplexe Nullstelle des Polynoms $X^3 - 2X + 2 \in \mathbb{Q}[X]$.

(a) Zeigen Sie, dass $\{1, x, x^2\}$ eine $\mathbb{Q}$-Basis von $\mathbb{Q}(x)$ ist.

(b) Sei $y \in \mathbb{Q}(x)$ beliebig. Begründen Sie, dass $\mathbb{Q}(y) \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{Q}(x)\}$. (Hinweis: Satz 1.7.)

(c) Stellen Sie die Elemente

$$(1 - x + 2)(x^4 + 1), \quad x^{-1} \quad \text{und} \quad (1 + x)^{-1}$$

von $\mathbb{Q}(x)$ als $\mathbb{Q}$-Linearkombinationen bezüglich der $\mathbb{Q}$-Basis $\{1, x, x^2\}$ dar.

2.2. *(Quadrate und ungerade einfache Erweiterungen)*
Es sei $\iota\colon K \to L$ eine Körpererweiterung mit ungeradem Grad $[L : K]$. Ferner sei $x \in L$ beliebig. Zeigen Sie $K(x) = K(x^2)$.
(Hinweis: Betrachten Sie das Minimalpolynom m_x von x über K und schreiben Sie dieses in der Form $m_x = XP(X^2) + Q(X^2)$ mit Polynomen $P, Q \in K[X]$. Was sagt es Ihnen nun, dass x eine Nullstelle von m_x in L ist?)

2.3. *(Einfache transzendente Erweiterungen)*
Beweisen Sie Satz 2.5: *Sei $\iota\colon K \to L$ eine Körpererweiterung und $x \in L$ transzendent über K. Dann ist die Körpererweiterung $K \to \mathrm{Quot}(K[X])$ K-isomorph zu der von ι induzierten Körpererweiterung $K \to K(x)$.*
(Hinweis: Sie können den Beweis von Satz 2.1 übertragen.)

Geben Sie Ihre Lösung bitte digital bis zum 17.10.2021, 23:55 Uhr, im zugehörigen TeachCenter-Kurs ab. Dort und auf der Vorlesungswebseite finden Sie auch weitere Informationen.
`https://tc.tugraz.at/main/course/view.php?id=1518`
`https://www.math.tugraz.at/~mtechnau/teaching/2021-w-algebra.html`