

3. Übung zur Algebra

3.1. (Transzendente Erweiterungen)

Es bezeichne $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{C}$ die Menge aller komplexen Zahlen, welche algebraisch über \mathbb{Q} sind.

- (a) Zeigen Sie, dass \mathbb{A}/\mathbb{Q} eine Körpererweiterung unendlichen Grades ist.
- (b) Zeigen Sie, dass die Menge \mathbb{A} abzählbar ist.
- (c) Folgern Sie, dass es in \mathbb{R} Elemente gibt, die transzendent über \mathbb{Q} sind.

3.2. (Zerfällungskörper bestimmen)

Bestimmen Sie für jedes der folgenden Polynome $P \in \mathbb{Q}[X]$ jeweils den Zerfällungskörper $\iota: \mathbb{Q} \rightarrow L$ mit $L \subseteq \mathbb{C}$ und $\iota = \text{id}_L|_{\mathbb{Q}}$, sowie dessen Grad $[L : \mathbb{Q}]$. Zerlegen Sie auch das Polynom $\iota^*P \in L[X]$ in ein Produkt von Linearfaktoren. (Hinweis: siehe Beispiel 2.11.)

- (a) $X^2 - 11$;
- (b) $X^4 - 2$;
- (c) $X^4 - 9X^2 + 4X + 12$.

3.3. (Grade von Zerfällungskörpern)

Sei K ein Körper und $P \in K[X]$ ein (nicht notwendigerweise irreduzibles) Polynom vom Grad n , sowie $\iota: K \rightarrow L$ ein Zerfällungskörper von P .

- (a) Zeigen Sie, dass $[L : K]$ ein Teiler von $n!$ ist.
(Hinweis: Schreiben Sie $L = K(x_1, \dots, x_n)$ mit den Nullstellen x_1, \dots, x_n von P in L und führen Sie eine Induktion; Betrachten Sie hierzu die Körpererweiterungen $K \rightarrow K(x_n)$ und $L/K(x_n)$.)
- (b) Belegen Sie anhand zweier Beispiele, dass sowohl der Fall $n < [L : K] < n!$, wie auch der Fall $[L : K] = n!$ eintreten können. (Hinweis: Aufgabe 3.2.)

Hinweis: bitte beachten Sie den verlängerten Abgabetermin. Überdies erscheint das 4. Übungsblatt regulär am 22.10.2021. Am 31.10.2021 sind also *zwei* Übungsblätter abzugeben. Das 3. und das 4. Übungsblatt werden *beide* am 03.11.2021 während der zweiten Hälfte des Vorlesungstermins besprochen.

Geben Sie Ihre Lösung bitte digital bis zum 31.10.2021, 23:55 Uhr, im zugehörigen TeachCenter-Kurs ab. Dort und auf der Vorlesungswebseite finden Sie auch weitere Informationen.

<https://tc.tugraz.at/main/course/view.php?id=1518>

<https://www.math.tugraz.at/~mtechnau/teaching/2021-w-algebra.html>