TECHNISCHE UNIVERSITÄT GRAZ
INSTITUT FÜR ANALYSIS UND ZAHLENTHEORIE
Marc Technau

Wintersemester 2021
Graz, den 22.10.2021

# 4. Übung zur Algebra

**4.1.** *(Minimalpolynome berechnen)*
Betrachten Sie die folgenden Teilkörper von $\mathbb{C}$

$$K_1 = \mathbb{Q}, \quad K_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}), \quad K_3 = \mathbb{Q}(\mathrm{i}\sqrt{3}), \quad L = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{3}).$$

(a) Zeigen Sie $K_j \subseteq L$ für $j = 1, 2, 3$.

(b) Bestimmen Sie für $j = 1, 2, 3$ jeweils das Minimalpolynom von $x = \sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{3}$ über $K_j$. (Hinweis: Berechnen Sie $x^2$, $x^3$ und $x^4$ wie in Beispiel 2.2. Durch nähere Inspektion von $x^3$ sollten Sie auch $K_2 \subseteq L$ und $K_3 \subseteq L$ bestätigen können.)

**4.2.** *(Endliche Körper)*
Es sei $q = p^n$ eine Primzahlpotenz und $\mathbb{F}_q$ ein endlicher Körper mit genau $q$ Elementen. Zeigen Sie:

(a) Für alle $x \in \mathbb{F}_q$ gilt $x^q - x = 0_{\mathbb{F}_q}$. (Hinweis: für $x = 0_{\mathbb{F}_q}$ ist das klar. Für alle anderen $x$ kann man in der endlichen Gruppe $\mathbb{F}_q^\times$ arbeiten.)

(b) $\mathbb{F}_q$ ist eindeutig bis auf Isomorphie; d.h. für jeden Körper $F$ mit $\#F = q$ gibt es einen Isomorphismus $j\colon \mathbb{F}_q \to F$. (Hinweis: Proposition 2.10.)

(c) $\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_2) = \{\mathrm{id}_{\mathbb{F}_2}\}$, aber $\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_4) \supsetneq \{\mathrm{id}_{\mathbb{F}_4}\}$. (Siehe Beispiel 1.4.)

**4.3.** *(Eindeutigkeit des algebraischen Abschlusses)*
Beweisen Sie Proposition 2.15: *Je zwei algebraische Abschlüsse von $K$ sind $K$-isomorph.* (Hinweis: Sind $\iota_{\mathrm{a}}\colon K \to K^{\mathrm{a}}$ und $\iota\colon K \to L$ zwei algebraische Abschlüsse von $K$, so können Sie Lemma 2.13 benutzen, um einen $K$-Homomorphismus $j\colon L \to K^{\mathrm{a}}$ zu finden und anschließend zeigen, dass dieser surjektiv ist. Dafür kann man zu $x \in K^{\mathrm{a}}$ das Minimalpolynom $m_x$ von $x$ über $L$ anschauen und dann $j^* m_x$ betrachten.)

**Hinweis:** Am 31.10.2021 sind *zwei* Übungsblätter abzugeben. Das 3. und das 4. Übungsblatt werden *beide* am 03.11.2021 während der zweiten Hälfte des Vorlesungstermins besprochen.

---

Geben Sie Ihre Lösung bitte digital bis zum 31.10.2021, 23:55 Uhr, im zugehörigen TeachCenter-Kurs ab. Dort und auf der Vorlesungswebseite finden Sie auch weitere Informationen.
`https://tc.tugraz.at/main/course/view.php?id=1518`
`https://www.math.tugraz.at/~mtechnau/teaching/2021-w-algebra.html`