

5. Übung zur Algebra

5.1. (Transzendente Erweiterungen, II)

Wir betrachten die Körpererweiterung \mathbb{C}/\mathbb{Q} . Sei $x \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ transzendent über \mathbb{Q} . Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} = \{x\}$ eine Transzendenzbasis von $L = \mathbb{Q}(x, i)$ ist. Geben Sie überdies eine weitere Transzendenzbasis \mathcal{B}' von L an derart, dass *keiner* der beiden Körper $\mathbb{Q}(\mathcal{B})$ und $\mathbb{Q}(\mathcal{B}')$ im jeweils anderen enthalten ist.

5.2. (Separabilitätsgrad und Konstruktion von K -Homomorphismen)

Betrachten Sie den Zwischenkörper $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3})$ der Körpererweiterung \mathbb{C}/\mathbb{Q} , sowie den Körper $\mathbb{A} \subset \mathbb{C}$ aus Aufgabe 3.1. Bei der Erweiterung \mathbb{A}/\mathbb{Q} handelt es sich um einen algebraischen Abschluss von \mathbb{Q} . (Das müssen Sie hier nicht zeigen.)

(a) Bestimmen Sie den Grad $[L : \mathbb{Q}]$, sowie den Separabilitätsgrad $[L : \mathbb{Q}]_s$.

(b) Geben Sie alle \mathbb{Q} -Homomorphismen $L \rightarrow \mathbb{A}$ an.

(Hinweis: Anhand der vorangegangenen Teilaufgabe sollte Ihnen klar sein, wie viele \mathbb{Q} -Homomorphismen Sie finden müssen. Nun können Sie diese durch schrittweise Fortsetzung von $\text{id}_{\mathbb{A}}|_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{A}$ konstruieren. — Eine dafür geeignete Vorgehensweise kennen Sie bereits aus Beispiel 2.11.)

(c) Wie viele \mathbb{Q} -Automorphismen $L \rightarrow L$ gibt es? Geben Sie diese an!

5.3. (Grad und Separabilitätsgrad)

Es sei $\iota : K \rightarrow L$ eine Körpererweiterung mit $[L : K] < \infty$.

(a) Seien $x_1, x_2 \in L$ beliebige Elemente. Zeigen Sie, dass der Separabilitätsgrad der *Multiplikationsformel* $[K(x_1, x_2) : K]_s = [K(x_1, x_2) : K(x_1)]_s \cdot [K(x_1) : K]_s$ genügt.

(Hinweis: Sei $\iota_a : K \rightarrow K^a$ ein algebraischer Abschluss von K . Identifizieren Sie K -Homomorphismen $j : K(x_1, x_2) \rightarrow K^a$ mit Paaren $(x_1^*, x_2^*) \in K^a \times K^a$, wobei x_1^* eine Nullstelle in K^a des Minimalpolynoms von x_1 über K und x_2^* eine Nullstelle in K^a des Minimalpolynoms von x_2 über $K(x_1)$ sei. — Im letzten Fall ist K^a mittels $j|_{K(x_1)}$ als Körpererweiterung von $K(x_1)$ aufzufassen.)

(b) Beweisen Sie Proposition 3.4: *Es gilt $[L : K]_s \leq [L : K]$ und $\iota : K \rightarrow L$ ist genau dann separabel wenn hierin Gleichheit gilt.*

(Hinweis: Führen Sie mittels der ersten Teilaufgabe einen Induktionsbeweis.)

Geben Sie Ihre Lösung bitte digital bis zum 07.11.2021, 23:55 Uhr, im zugehörigen TeachCenter-Kurs ab. Dort und auf der Vorlesungswebseite finden Sie auch weitere Informationen.

<https://tc.tugraz.at/main/course/view.php?id=1518>

<https://www.math.tugraz.at/~mtechnau/teaching/2021-w-algebra.html>