Technische Universität Graz
Institut für Analysis und Zahlentheorie
Marc Technau

Wintersemester 2021
Graz, den 05.11.2021

6. Übung zur Algebra

6.1. *(Endliche Körper sind perfekt)*
Ein Körper K heißt *perfekt* (oder *vollkommen*), falls jedes irreduzible Polynom über diesem automatisch separabel ist. Laut Korollar 3.7 ist jeder Körper mit Charakteristik 0 perfekt. Sei also K ein Körper mit Charakteristik $p \neq 0$ und $\phi\colon K \to K$, $x \mapsto x^p$ der Frobenius-Endomorphismus. Zeigen Sie:

(a) K ist genau dann perfekt, wenn der Frobenius-Endomorphismus surjektiv ist.
(Hinweis: Für die eine Richtung können Sie Korollar 3.7 und die Surjektivität von ϕ benutzen, um ein etwaiges separables Polynom zu zerlegen. Ist hingegen ϕ *nicht* surjektiv, so betrachten Sie zu $a \in K \setminus \phi(K)$ das Polynom $X^p - a \in K[X]$ und zeigen, dass dieses irreduzibel aber *nicht* separabel ist. Sie können die Überlegungen aus Beispiel 3.3 benutzen.)

(b) Folgern Sie, dass jeder endliche Körper perfekt ist.

6.2. *(Normalität prüfen)*
Sei $\mathbb{F}_{81}$ ein endlicher Körper mit genau 81 Elementen. Betrachten Sie die offensichtliche Körpererweiterung $\mathbb{F}_{81} \to L$ mit $L = \mathrm{Quot}(\mathbb{F}_{81}[T])$, sowie deren Zwischenkörper $K = \mathbb{F}_{81}(T^{10}) \subseteq L$. Zeigen Sie, dass die Erweiterung L/K normal ist.
(Hinweis: Sie haben schon mehrfach Polynome der Bauart $X^n - a$ faktorisiert. — Wie sahen diese Faktorisierungen aus? Gegebenenfalls hilft es, sich darauf zu berufen, dass die Einheitengruppe $\mathbb{F}_{81}^\times$ zyklisch ist.)

6.3. *(Galois-Hülle)*
Es sei $\iota\colon K \to L$ eine separable Körpererweiterung.

(a) Zeigen Sie, dass es eine separable Körpererweiterung $L \to L^g$ gibt derart, dass deren Verkettung mit ι eine normale, separable Körpererweiterung $\iota_g\colon K \to L^g$ stiftet.
(Hinweis: Falls ι nicht bereits normal ist, „fehlen“ in L laut Satz 3.10 gewissermaßen noch Elemente. Diese braucht man bloß noch hinzuadjungieren, um Normalität herzustellen, und sich überlegen, dass einem dabei die Separabilität nicht abhanden kommt.)

(b) Zeigen Sie: Hat $\iota\colon K \to L$ endlichen Grad, so kann die Erweiterung $L \to L^g$ auch mit endlichem Grad gewählt werden.

Geben Sie Ihre Lösung bitte digital bis zum 14.11.2021, 23:55 Uhr, im zugehörigen TeachCenter-Kurs ab. Dort und auf der Vorlesungswebseite finden Sie auch weitere Informationen.
`https://tc.tugraz.at/main/course/view.php?id=1518`
`https://www.math.tugraz.at/~mtechnau/teaching/2021-w-algebra.html`

(c) Seien $K \subseteq L$ nun Teilkörper eines algebraisch abgeschlossenen Körpers K^{a}. Begründen sie kurz, dass man L^{g} in der vorherigen Teilaufgabe ebenfalls als Teilkörper von K^{a} wählen kann, der K und L enthält.
(Hinweis: Hier ist *fast* nichts zu tun; Die Aufgabe soll nur noch mal das generelle Prinzip verdeutlichen, dass man viele nützliche Konstruktionen auch innerhalb eines zuvor fixierten algebraischen Abschlusses durchführen kann, ohne diesen verlassen zu müssen.)

(Bemerkung: Ist die obige Körpererweiterung $L \to L^{\mathrm{g}}$ minimal in dem Sinne, dass kein echter Zwischenkörper von $L \to L^{\mathrm{g}}$ die Rolle von L^{g} einnehmen kann, so nennt man $L \to L^{\mathrm{g}}$ die *Galois-Hülle von* $\iota\colon K \to L$.)