Technische Universität Graz
Institut für Analysis und Zahlentheorie
Marc Technau

Wintersemester 2021
Graz, den 12.11.2021

7. Übung zur Algebra

7.1. *(Separabilität prüfen)*

(a) Untersuchen Sie jeweils für welche $n \in \mathbb{N}_0$ die folgenden Polynome separabel sind.

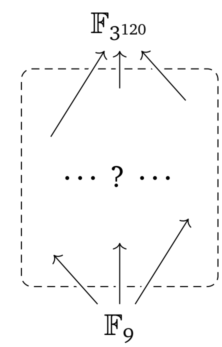
$$X^n - 1 \in \mathbb{Q}[X], \quad X^n - 1 \in \mathbb{F}_4[X], \quad X^n + X^2 \in \mathbb{C}[X].$$

(b) Betrachten Sie für jedes der obigen Polynome $P_n \in K[X]$ jeweils einen Zerfällungskörper $\iota\colon K \to L$. Für welche $n \in \mathbb{N}_0$ ist dieser jeweils separabel?
(Hinweis: Die Antwort ist vielleicht überraschend kurz — siehe Bemerkung 3.9.)

7.2. *(Zwischenkörperverband von $\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q$)*

(a) Beweisen Sie die letzte Aussage von Satz 4.7: *Seien q eine Primzahlpotenz und n, k natürliche Zahlen. Genau dann hat $\mathbb{F}_{q^n}$ einen — und dann auch nur einen — zu $\mathbb{F}_{q^k}$ $\mathbb{F}_q$-isomorphen Teilkörper, wenn k ein Teiler von n ist.*

(b) Zeichnen Sie ein Diagramm, welches alle Zwischenkörper der Erweiterung $\mathbb{F}_{3^{120}}/\mathbb{F}_9$ zeigt und mit den zugehörigen Körpergraden annotiert ist (wie in Beispiel 4.8).
(Hinweis: Ihr Diagramm sollte — einschließlich $\mathbb{F}_9$ und $\mathbb{F}_{3^{120}}$ — insgesamt zwölf Zwischenkörper enthalten.)



7.3. *(Der Translationssatz)*
Es seien L und M seien beide Zwischenkörper einer Körpererweiterung Z/K. Ferner sei L/K eine Galois-Erweiterung und $LM := K(L \cup M)$ der kleinste Zwischenkörper von Z/K, der $L \cup M$ enthält. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die Erweiterung LM/M ist eine Galois-Erweiterung.
(Achtung: es wurde von keiner der Erweiterungen Z/K oder M/K angenommen, dass diese algebraisch zu sein brauchen.)

(b) Die Abbildung $\Psi\colon\ \mathrm{Gal}(LM/M) \to \mathrm{Gal}(L/(L \cap M))$, $\sigma \mapsto (\sigma|_L)$, ist wohl-definiert. Bei dieser handelt es sich außerdem um einen Gruppenisomorphismus; Insbesondere ist $\mathrm{Gal}(LM/M) \cong \mathrm{Gal}(L/(L \cap M))$.
(Hinweis: Zum Nachweis der Surjektivität von Ψ können Sie $\mathrm{Fix}(\Psi(\mathrm{Gal}(LM/M))) = L \cap M$ zeigen, und anschließend die Galois-Korrespondenz benutzen.)

Geben Sie Ihre Lösung bitte digital bis zum 21.11.2021, 23:55 Uhr, im zugehörigen TeachCenter-Kurs ab. Dort und auf der Vorlesungswebseite finden Sie auch weitere Informationen.
`https://tc.tugraz.at/main/course/view.php?id=1518`
`https://www.math.tugraz.at/~mtechnau/teaching/2021-w-algebra.html`

Man veranschaulicht sich die Situation der aus der vorliegenden Aufgabe üblicherweise an folgendem Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
 & LM & \\
L \arrow[ur] & & M \arrow[ul, "\mathrm{Gal}(LM/M)"'] \; . \\
 & L \cap M \arrow[ul, "\mathrm{Gal}(L/(L\cap M))"] \arrow[ur] & \\
 & K \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$