TECHNISCHE UNIVERSITÄT GRAZ
INSTITUT FÜR ANALYSIS UND ZAHLENTHEORIE
Marc Technau

Wintersemester 2021
Graz, den 19.11.2021

8. Übung zur Algebra

8.1. *(Minimalpolynome via Galois-Gruppen)*
Es sei L/K eine Galois-Erweiterung und $x \in L$ beliebig. Ferner sei $U = \mathrm{Gal}(L/K(x))$, sowie $G = \mathrm{Gal}(L/K)$. Für $\sigma \in G$ sei $\sigma U = \{\, \sigma \circ \tau : \tau \in U \,\}$ die Linksnebenklasse von U bezüglich σ. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Der Wert $\sigma(x)$ ist unabhängig vom Repräsentant σ von σU.

(b) Das Polynom $\prod_{\sigma U}(X - \sigma(x))$ ist das Minimalpolynom m_x von x über K, wobei das Produkt über alle verschiedenen Linksnebenklassen σU zu erstrecken ist.

(c) Es gilt $\prod_{\sigma \in G}(X - \sigma(x)) = m_x^{[L:K(x)]}$.

8.2. *(Primitive Elemente in abelschen Galois-Erweiterungen)*

(a) Sei L/K eine Galois-Erweiterung mit abelscher Galois-Gruppe. Ferner sei L Zerfällungskörper des irreduziblen Polynoms $P \in K[X]$. Zeigen Sie: Für jede Nullstelle x von P in L ist $L = K(x)$. (Hinweis: Benutzen Sie Satz 5.3 (3).)

(b) Zeigen Sie, dass es bis auf Isomorphie genau zwei Gruppen der Ordnung 6 gibt, nämlich eine zyklische Gruppe und die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}_3 = \mathrm{Sym}(\{1,2,3\})$. (Hinweis: Hier ist Ihr Wissen aus der *Einführung in die Algebra* gefragt.)

(c) Sei $L = \mathbb{Q}(\zeta, \sqrt[3]{2}) \subseteq \mathbb{C}$ mit $\zeta = \exp(2\pi \mathrm{i}/3)$. Folgern Sie aus den vorherigen beiden Teilaufgaben $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong \mathfrak{S}_3$.

8.3. *($X^3 - 2$ und Galois-Gruppen)*
Betrachten Sie die Körpererweiterung $L = \mathbb{Q}(\zeta, \sqrt[3]{2}) \subseteq \mathbb{C}$ über $\mathbb{Q}$ mit $\zeta = \exp(2\pi \mathrm{i}/3)$ aus Aufgabe 8.2 (c).

(a) Fertigen Sie wie in Beispiel 4.8 ein Diagramm mit allen Zwischenkörpern und den Teilmengeninklusionen zwischen diesen an.

(b) Annotieren Sie dieses Diagramm mit den Graden der dabei entstehenden Körpererweiterungen.

(c) Markieren Sie auch, bei welchen der auftretenden Erweiterungen es sich um Galois-Erweiterungen handelt.

Geben Sie Ihre Lösung bitte digital bis zum 28.11.2021, 23:55 Uhr, im zugehörigen TeachCenter-Kurs ab. Dort und auf der Vorlesungswebseite finden Sie auch weitere Informationen.
`https://tc.tugraz.at/main/course/view.php?id=1518`
`https://www.math.tugraz.at/~mtechnau/teaching/2021-w-algebra.html`