TECHNISCHE UNIVERSITÄT GRAZ
INSTITUT FÜR ANALYSIS UND ZAHLENTHEORIE
Marc Technau

Wintersemester 2021
Graz, den 26.11.2021

9. Übung zur Algebra

9.1. *(Die Diskriminante)*
Es sei L/K ein Zerfällungskörper eines normierten separablen Polynoms $P \in K[X]$ und $P = \prod_{j=1}^{n}(X - x_j)$ mit geeigneten Elementen $x_1, \ldots, x_n \in L$. Die *Diskriminante* $\operatorname{disc}(P)$ *von* P ist definiert durch

$$\operatorname{disc}(P) = (\Delta(P))^2, \quad \text{mit} \quad \Delta(P) = \prod_{1 \le j < k \le n} (x_j - x_k).$$

(a) Zeigen Sie, dass $\operatorname{disc}(P)$ ein Element von K ist. (Hinweis: Satz 5.3 (1).)

(b) Die Galois-Gruppe $\operatorname{Gal}(P) = \operatorname{Gal}(L/K)$ operiert bekanntlich treu auf den Nullstellen von P, was einen Isomorphismus von $\operatorname{Gal}(P)$ auf eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe $\operatorname{Sym}(\{x_1, \ldots, x_n\})$ stiftet. Der Körper K habe Charakteristik $\neq 2$. Zeigen Sie, dass diese Untergruppe genau dann in der alternierenden Gruppe in $\operatorname{Sym}(\{x_1, \ldots, x_n\})$ enthalten ist, wenn $\operatorname{disc}(P)$ ein Quadrat in K ist.
(Hinweis: Der Zusatz „in K“ im letzten Satz ist ausschlaggebend. Zeigen Sie, dass $\Delta(P)$ genau dann von einem Element von $\operatorname{Gal}(P)$ fixiert wird, wenn dieses eine Permutation mit positivem Vorzeichen auf $\{x_1, \ldots, x_n\}$ bewirkt. Die Forderung an die Charakteristik von K stellt $\Delta(P) \neq -\Delta(P)$ sicher.)

(c) Interessanterweise kann man die Diskriminante eines Polynoms anhand von dessen Koeffizienten berechnen *ohne* die Nullstellen des Polynoms zu bestimmen, z.B.

$$\operatorname{disc}(X^3 + bX^2 + cX + d) = b^2c^2 - 4c^3 - 4b^3d - 27d^2 + 18bcd \quad (\text{für } b, c, d \in K).$$

Benutzen Sie dies in Kombination mit Bemerkung 5.14, um die Galois-Gruppen der kubischen Polynome

$$P_1 = X^3 - X - 1 \in \mathbb{Q}[X] \quad \text{und} \quad P_2 = X^3 - 3X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$$

bis auf Isomorphie zu bestimmen.
(Hinweis: Es ist hier *nicht* nötig oder gefordert, die fraglichen Polynome zu faktorisieren oder gar die Elemente der Galois-Gruppen explizit zu konstruieren. Ebenfalls ist es nicht gefordert, die angegebene Formel für die Diskriminante zu beweisen.)

Geben Sie Ihre Lösung bitte digital bis zum 05.12.2021, 23:55 Uhr, im zugehörigen TeachCenter-Kurs ab. Dort und auf der Vorlesungswebseite finden Sie auch weitere Informationen.
`https://tc.tugraz.at/main/course/view.php?id=1518`
`https://www.math.tugraz.at/~mtechnau/teaching/2021-w-algebra.html`

9.2. *(Galois-Gruppen bestimmen)*

Betrachten Sie das Polynom $P = X^5 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ und dessen Zerfällungskörper $L = \mathbb{Q}(\varrho, \zeta) \subset \mathbb{C}$ mit $\varrho = \sqrt[5]{2}$ und $\zeta = \exp(2\pi i/5)$.

(a) Zeigen Sie $[L : \mathbb{Q}] = 20$ und konstruieren Sie alle Elemente von $G = \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$.

(b) Zeichnen Sie die Operation der Galoisgruppe G auf $V(P) = \{\zeta^\nu \varrho : \nu \in \mathbb{Z}\}$. Benutzen Sie hierzu folgende Vorlage:

`https://www.math.tugraz.at/~mtechnau/downloads/2021-w-algebra-X5-2.pdf`

`https://www.math.tugraz.at/~mtechnau/downloads/2021-w-algebra-X5-2.tex`

(Hinweis: Sobald Sie das Abbildungsverhalten eines Elements $f \in G$ kennen, können Sie natürlich leicht $f \circ f$, $f \circ f \circ f$, usw. bestimmen, und sich dadurch Rechenaufwand sparen.)

(c) Bestimmen Sie den Isomorphietyp von G.

(d) Wählen Sie exemplarisch eine (nicht-triviale!) Untergruppe U von G und bestimmen Sie den zugehörigen Fixkörper $\mathrm{Fix}(U)$. (Hinweis: vgl. Beispiel 5.15.)

9.3. *(Elementarsymmetrische Polynome)*

Im Folgenden sei $n \in \mathbb{N}$ und $T_1, \dots, T_n, X$ seien verschiedene Variablen. Wir schreiben zur Abkürzung $\boldsymbol{T} = \{T_1, \dots, T_n\}$. Die *elementarsymmetrischen Polynome* $E_1, \dots, E_n \in \mathbb{Z}[\boldsymbol{T}]$ seien definiert durch

$$P := \prod_{u=1}^{n} (X - T_u) =: X^n - E_1 X^{n-1} \pm \ldots + (-1)^n E_n X^0 \in (\mathbb{Z}[\boldsymbol{T}])[X].$$

Für $n = 3$ hat man beispielsweise $E_1 = T_1 + T_2 + T_3$, $E_2 = T_1T_2 + T_1T_3 + T_2T_3$ und $E_3 = T_1T_2T_3$. Sei K ein Körper. Wir betrachten den Körper $L = \mathrm{Quot}(K[\boldsymbol{T}])$ als Körpererweiterung von K und darin den Zwischenkörper $k = K(E_1, \dots, E_n)$.

Die symmetrische Gruppe $\mathrm{Sym}(\boldsymbol{T})$ operiert auf L durch Vertauschen der Variablen. Ein Element von L heißt *symmetrisch*, falls es invariant unter dieser Operation ist.

(a) Welche der folgenden Elemente von L sind symmetrisch? (Hier sei $n = 3$.)

$$1_L, \quad E_2, \quad T_1T_2 + T_3, \quad \frac{T_1 + T_2 + T_3}{4(T_1T_2T_3)^9}, \quad \mathrm{disc}(P) = \prod_{1 \le u < v \le n} (T_u - T_v)^2.$$

(b) Zeigen Sie, dass L/k eine Galois-Erweiterung ist. (Hinweis: Betrachten Sie P.)

(c) Zeigen Sie: Die Operation von P auf den Nullstellen von P (also auf $\boldsymbol{T}$) induziert einen Gruppenisomorphismus $\mathrm{Gal}(L/k) \cong \mathrm{Sym}(\boldsymbol{T})$.
(Hinweis: Es ist im Wesentlichen nur einzusehen, dass jede Permutation der Unbekannten durch ein Element der Galois-Gruppe bewirkt werden kann. Konstruieren Sie ein solches Element; Starten Sie dafür mit einem geeigneten Ringhomomorphismus $K[\boldsymbol{T}] \to L$.)

(d) Zeigen Sie $k = \{f \in L : f \text{ ist symmetrisch}\}$. (Hinweis: $\mathrm{Fix}(\mathrm{Gal}(L/k))$.)

(e) Was hat diese Aufgabe mit der Formel

$$\mathrm{disc}(X^3 + bX^2 + cX + d) = b^2c^2 - 4c^3 - 4b^3d - 27d^2 + 18bcd \quad (b, c, d \in K)$$

aus Aufgabe 9.1 zu tun? (Hinweis: Betrachten Sie P und $E_1, \dots, E_n$.)