Technische Universität Graz
Institut für Analysis und Zahlentheorie
Marc Technau

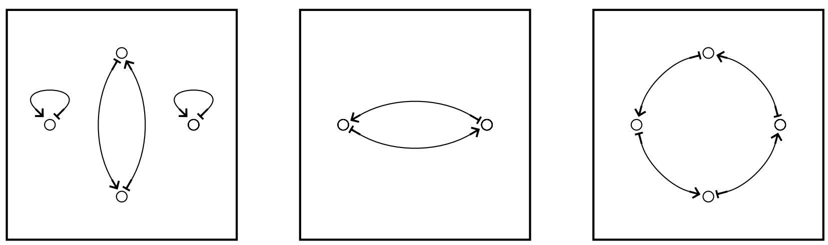
Wintersemester 2021
Graz, den 03.12.2021

10. Übung zur Algebra

10.1. *(Operation der Galois-Gruppe eines Polynoms)*
Gegeben seien die folgenden Polynome über $\mathbb{Q}$:

$$P_1 = X^4 - 2, \quad P_2 = X^4 - 1, \quad P_3 = X^2 - 4X + 2.$$

Die folgenden Abbildungen zeigen jeweils die Operation eines Elements von $\mathrm{Gal}(P_u)$ ($u = 1, 2, 3$) auf den Nullstellen von P_u (weiße Punkte; eingebettet in $\mathbb{C}$):

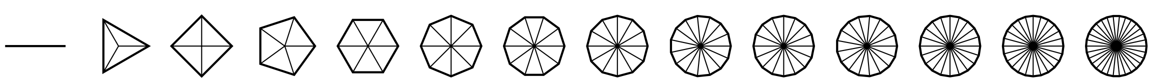


(i) (ii) (iii)

(a) Ordnen Sie den Abbildungen (i)–(iii) jeweils eine Zahl $u \in \{1, 2, 3\}$ zu derart, dass die in der Abbildung gezeigte Operation durch ein Element von $\mathrm{Gal}(P_u)$ bewirkt werden kann.

(b) Ist die in der ersten Teilaufgabe zu bestimmende Zuordnung eindeutig?

10.2. *(Konstruierbarkeit von regelmäßigen n-Ecken)*
Zeigen Sie, dass das regelmäßige n-Eck $\{\exp(2\pi i \nu/n) : \nu \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{C}$ genau dann mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist, wenn $\varphi(n)$ eine Zweierpotenz ist.



(Hinweis: Sie können den Beweis von Korollar 5.22 übertragen. Beachten Sie jedoch, dass $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ nicht immer zyklisch ist [z.B. $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times \cong C_2 \times C_2$]. Das macht die Konstruktion des benötigten Körperturms etwas komplizierter.)

Geben Sie Ihre Lösung bitte digital bis zum 12.12.2021, 23:55 Uhr, im zugehörigen TeachCenter-Kurs ab. Dort und auf der Vorlesungswebseite finden Sie auch weitere Informationen.
`https://tc.tugraz.at/main/course/view.php?id=1518`
`https://www.math.tugraz.at/~mtechnau/teaching/2021-w-algebra.html`

10.3. *(Beipiele für (nicht-)auflösbare Gruppen)*

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Gruppen auflösbar sind:

(1) Alle abelschen Gruppen G;

(2) Alle Diedergruppen D_{2n} $(n \in \mathbb{N})$;

(3) Alle symmetrischen Gruppen $\mathfrak{S}_n$ mit $1 \leq n \leq 4$;

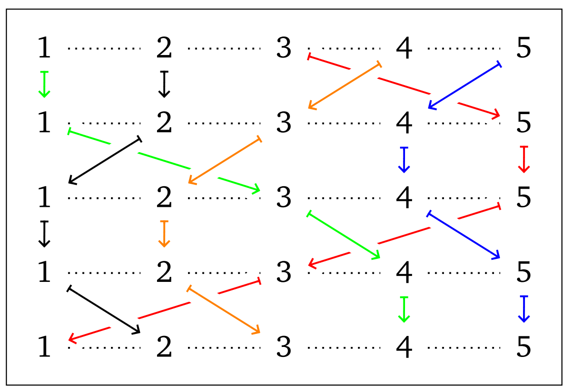
(4) Die Gruppe $\begin{pmatrix} \mathbb{F}_5^\times & \mathbb{F}_5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (siehe auch Aufgabe 9.2).

(Hinweis: Hier ist es gegebenenfalls schneller, direkt mit der Definition zu arbeiten, anstatt Kommutatorgruppen zu berechnen. Bei $\mathfrak{S}_4$ muss man ein wenig nachdenken, kommt aber auch ohne viel Rechenarbeit zum Ziel.)

(b) Beweisen Sie Satz 5.30: *Für* $n \geq 5$ *ist die symmetrische Gruppe* $\mathfrak{S}_n$ *nicht auflösbar.* (Hinweis: Ist $N \lhd \mathfrak{S}_n$ und $\mathfrak{S}_n/N$ abelsch, so benutzen Sie

$$(1\,2\,3) \circ (3\,4\,5) \circ (1\,2\,3)^{-1} \circ (3\,4\,5)^{-1} = (1\,4\,3),$$

um $(1\ 4\ 3) \in N$ einzusehen. Zeigen Sie auf ähnliche Weise, dass N alle 3-Zyklen enthält. Folgern Sie hieraus $N = A_n$ mittels Aufgabe 6.2 aus der *Einführung in die Algebra*. Wie folgt dann, dass $\mathfrak{S}_n$ nicht auflösbar ist? Alternativ zeigen Sie $\mathfrak{S}_n^{(t)} = A_n$ für $t \in \mathbb{N}$.)



Hinweis: Bitte füllen Sie bis zum 31.12.2021 auf TUGRAZ■online die beiden Evaluierungen zur Vorlesung und Übung aus.