Technische Universität Graz
Institut für Analysis und Zahlentheorie
Marc Technau

Wintersemester 2021
Graz, den 10.12.2021

11. Übung zur Algebra

11.1. *(Verträglichkeit von Auflösbarkeit mit diversen Gruppentheorie-Konzepten)*
Beweisen Sie Korollar 5.27: *Untergruppen auflösbarer Gruppen sind auflösbar und homomorphe Bilder von auflösbaren Gruppen sind auflösbar (d.h. ist $\psi\colon G \to H$ ein Grupperhomomorphismus, und G auflösbar, so ist auch $\operatorname{im}\psi$ auflösbar). Ist G eine Gruppe mit auflösbarem Normalteiler N und auflösbarer Quotientengruppe G/N, so ist auch G auflösbar.*

11.2. *(Radikalerweiterungen und Auflösbarkeit; qualitativ)*
Alle Adjunktionen in der folgenden Aufgabe sind bezüglich der Körpererweiterung $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$ zu verstehen. Für jede komplexe Zahl z sei $\sqrt[3]{z}$ eine beliebige Kubikwurzel von z. (Zur Erinnerung: Für $z \neq 0$ haben Sie drei verschiedene Möglichkeiten für „$\sqrt[3]{z}$". Hier geht es nur darum, sich darauf geeinigt zu haben, bei mehrfachem Auftreten von $\sqrt[3]{z}$ stets *dieselbe* Zahl zu meinen.) Das irreduzible Polynom $P = X^6 - 2X^3 - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ hat in $\mathbb{C}$ die sechs Nullstellen $\zeta^{2k}\sqrt[3]{1 \pm \sqrt{2}}$ ($k = 1, 2, 3$) mit $\zeta = \exp(2\pi i/6)$ und bei $R/\mathbb{Q}$ mit $R = \mathbb{Q}(x_1)$ und $x_1 = \sqrt[3]{1 + \sqrt{2}}$ handelt es sich um eine Radikalerweiterung, denn wir haben $R = \mathbb{Q}(x_0, x_1)$ mit $x_0 = \sqrt{2}$ und

$$x_0^6 = 8 \in \mathbb{Q} \quad \text{und} \quad x_1^6 = 3 + 2\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(x_0).$$

Nun sei $L/\mathbb{Q}$ mit $L \subseteq \mathbb{C}$ der Zerfällungskörper von $(X^6 - 1)P$.

$$\begin{tikzcd} L \\ \text{(mehrere Zwischen-schritte)} \arrow[u, dashed] \\ \mathbb{Q}(\zeta,\sqrt{2}) \arrow[u, dashed] \\ \mathbb{Q}(\zeta) \arrow[u, "\text{Grad?}"'] \\ \mathbb{Q} \arrow[u, "\text{Grad?}"'] \end{tikzcd}$$

(a) Verfahren Sie *wie im Beweis von Lemma 5.28* und konstruieren Sie einen Körperturm (mit zugehörigem Turm von Galois-Gruppen) der nebenstehenden Form, wobei in jedem „Schritt $K \to K(x)$" nur ein Element $x \in L$ mit $x^6 \in K$ adjungiert werden soll. Bei der Betrachtung der Liste „$x_{j,1}, x_{j,2}, \ldots, x_{j,n}$" (in der Notation aus dem Beweis von Lemma 5.28) dürfen Sie Wiederholungen vermeiden, um unnötig viele triviale (Grad 1) Schritte in Ihrem Turm zu vermeiden.

(b) Bestätigen Sie ohne Lemma 5.24, dass für jedem Ihrer Schritte $K \to K(x)$ die zugehörige Faktorgruppe $\operatorname{Gal}(L/K)/\operatorname{Gal}(L/K(x))$ abelsch ist.

Geben Sie Ihre Lösung bitte digital bis zum 09.01.2022, 23:55 Uhr, im zugehörigen TeachCenter-Kurs ab. Dort und auf der Vorlesungswebseite finden Sie auch weitere Informationen.
`https://tc.tugraz.at/main/course/view.php?id=1518`
`https://www.math.tugraz.at/~mtechnau/teaching/2021-w-algebra.html`

(Hinweis: Betrachten Sie $[K(x) : K]$; Damit, und zusammen mit Ihrer Kenntnis kleiner Gruppen, sollte die Frage schon fast banal sein.)

11.3. *(Moduln als Operationen)*
Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring und $(M, \dotplus)$ eine abelsche Gruppe zusammen mit einer Abbildung $*\colon R \times M \to M$, welche für alle $\lambda, \mu \in R$ und $v, w \in M$ die folgenden Axiome erfüllt:

- $\lambda * (v \dotplus w) = (\lambda * v) \dotplus (\lambda * w)$,
- $(\lambda + \mu) * v = (\lambda * v) \dotplus (\mu * v)$,
- $(\lambda \cdot \mu) * v = \lambda * (\mu * v)$,
- $1_R * v = v$.

Dann bezeichnen wir $(M, \dotplus, *)$ als einen ***Links-R-Modul***. Zeigen Sie, dass die Abbildungen

$$\{\text{Abbildungen } *\colon R \times M \to M \text{ mit Axiomen wie oben}\} \underset{\Psi}{\overset{\Phi}{\rightleftarrows}} \operatorname{Hom}(R, \operatorname{End}(M, \dotplus)),$$

gegeben durch

$$\Phi(*) = \begin{cases} R \to \operatorname{End}(M, \dotplus), \\ \lambda \mapsto \begin{cases} M \to M, \\ v \mapsto \lambda * v \end{cases} \end{cases} \quad \text{und} \quad \Psi(\varphi) = \begin{cases} R \times M \to M, \\ (\lambda, v) \mapsto (\varphi(\lambda))(v), \end{cases}$$

zueinander inverse Bijektionen sind. (Dabei ist $R' = \operatorname{End}(M, \dotplus)$ als Ring mit punktweise definierter Addition und Verkettung von Abbildungen als Multiplikation aufzufassen und $\operatorname{Hom}(R, R')$ bezeichnet hier die Menge der Ringhomomorphismen von R nach R'.)

(Bemerkung: Diese Aufgabe zeigt, dass Links-R-Moduln die naheliegende Verallgemeinerung von Gruppen-Links-Operationen darstellen.)

Hinweise: (1) Bitte füllen Sie bis zum 31.12.2021 auf TUGRAZ■online die beiden Evaluierungen zur Vorlesung und Übung aus. (2) Bitte beachten Sie den verlängerten Abgabetermin. Überdies erscheint das 12. Übungsblatt regulär am 17.12.2021. Am 09.01.2022 sind also *zwei* Übungsblätter abzugeben.