TECHNISCHE UNIVERSITÄT GRAZ
INSTITUT FÜR ANALYSIS UND ZAHLENTHEORIE
Marc Technau

Wintersemester 2021
Graz, den 17.12.2021

12. Übung zur Algebra

12.1. *($K[X]$-Moduln)*
Es sei K ein Körper. Betrachten Sie die beiden Matrizen

$$A := „\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}“ := \begin{pmatrix} 1_K & 1_K \\ 0_K & (1_K + 1_K + 1_K) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := „\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}“.$$

Die Matrix A liefert auf dem K-Vektorraum $V = K^2$ eine $K[X]$-Modulstruktur mittels

$$K[X] \times V \longrightarrow V, \quad (P, v) \longmapsto P(A) \cdot v,$$

wobei $P(A) \in K^{2\times 2}$ durch Einsetzen von A in das Polynom P gegeben sei, und $P(A) \cdot v$ die Matrix–Vektor-Multiplikation bezeichne. Wir nennen den so erhaltenen $K[X]$-Modul V_A. Analog sei V_B definiert.
Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für $K = \mathbb{Q}$ sind V_A und V_B (als $K[X]$-Moduln) isomorph.

(b) Für $K = \mathbb{F}_2$ sind V_A und V_B (als $K[X]$-Moduln) *nicht* isomorph.

(Hinweis: Mit Blick auf Beispiel 6.3 sollte Ihnen klar werden, dass es sich hier im Kern nur um ein Ähnlichkeitsproblem von Matrizen handelt, welches Sie aus der *linearen Algebra* bereits sehr gut kennen und lösen können. Die eigentliche Aufgabe ist hier vornehmlich, zwischen der bereits bekannten Sprache der linearen Algebra und der Sprache der Modultheorie zu übersetzen.)

12.2. *(Direkte Summen von R-Moduln)*
Beweisen Sie die Aussagen (3) und (4) von Satz 6.7: Sei $(M_i)_i$ eine Familie von R-Moduln und N ein R-Modul.

(a) Für jede Familie $(g_i)_i$ von R-Modulhomomorphismen $g_i \colon M_i \to N$ gibt es genau einen R-Modulhomomorphismus $g \colon \bigoplus_i M_i \to N$, der für jeden Index j das folgende Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{tikzcd} & N \\ M_j \arrow[ur, "g_j"] \arrow[r, "\iota_j"] & \bigoplus_i M_i \arrow[u, dashed, "\exists!\, g"'] \end{tikzcd}.$$

Geben Sie Ihre Lösung bitte digital bis zum 09.01.2022, 23:55 Uhr, im zugehörigen TeachCenter-Kurs ab. Dort und auf der Vorlesungswebseite finden Sie auch weitere Informationen.
`https://tc.tugraz.at/main/course/view.php?id=1518`
`https://www.math.tugraz.at/~mtechnau/teaching/2021-w-algebra.html`

Überdies hat man die Formel $g = \sum_i (g_i \circ \pi_i)$.

(b) Ist X ein R-Modul zusammen mit R-Modulhomomorphismen $\tilde{\iota}_j \colon M_j \to X$ derart, dass die Aussage in (a) auch für X statt $\bigoplus_i M_i$ und $\tilde{\iota}_j$ statt ι_j gilt, so gibt es genau einen(!) R-Modulisomorphismus $f \colon \bigoplus_i M_i \to X$, welcher für jeden Index j das folgende Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{tikzcd} & X \\ M_j \arrow[ur, "\tilde{\iota}_j"] \arrow[r, "\iota_j"] & \bigoplus_i M_i . \arrow[u, dashed, "\wr", "\exists! f"'] \end{tikzcd}$$

(Hinweis: Sie können sich am in der Vorlesung geführten Beweis von Satz 6.7 (1) orientieren. Beachten Sie auch Aufgabe 1.4 aus der *Einführung in die Algebra*.)

12.3. *(Direkte Summen von Moduln)*
Im Folgenden wird Ihnen jeweils eine rationale 3×3-Matrix A oder B gegeben, welche $V = \mathbb{Q}^3$,wie in Aufgabe 12.1, um eine $\mathbb{Q}[X]$-Modulstruktur augmentiert. Wir schreiben dann V_A bzw. V_B für V, um auf diese Zusatzstruktur hinzuweisen. Entscheiden Sie jeweils unter Angabe einer Begründung, ob die folgenden Aussagen stimmen:

(a) „Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist $V_A = \mathbb{Q}[X]\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{Q}[X]\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$;“

(b) „Für $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ist $V_B = \mathbb{Q}[X]\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{Q}[X]\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.“