Technische Universität Graz
Institut für Analysis und Zahlentheorie
Marc Technau

Wintersemester 2021
Graz, den 07.01.2022

13. Übung zur Algebra

13.1. *(Freie Moduln)*
Beweisen Sie Proposition 6.10: *Sei I eine beliebige Menge. Für jeden R-Modul M und jede Abbildung $G\colon I \to M$ gibt es* genau einen *R-Modulhomomorphismus $g\colon R^{(I)} \to M$ mit $g(\boldsymbol{i}) = G(i)$ für alle $i \in I$:*

$$\begin{tikzcd} R^{(I)} \arrow[r, dashed, "\exists!\, g"] & M\,. \\ I \arrow[u, "i \mapsto \iota_i(1_R)"] \arrow[ur, "G"'] & \end{tikzcd}$$

Man hat einen Isomorphismus von abelschen Gruppen

$$\operatorname{Abb}(I, M) \xrightarrow{\ \sim\ } \operatorname{Hom}_R(R^{(I)}, M), \quad G \longmapsto g.$$

Ist R kommutativ, so handelt es sich sogar um R-Modulisomorphismen.
(Hinweis: Im Wesentlichen braucht man sich bloß auf Satz 6.7 (3) berufen. Vermutlich fällt Ihre Lösung hier also sehr kurz aus.)

13.2. *(Freie Moduln und Faktormoduln)*
Wir betrachten den $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}[\mathrm{i}] = \{\, z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \in \mathbb{Z}, \operatorname{Im} z \in \mathbb{Z} \,\}$ der *ganzen gaußschen Zahlen* (mit der offensichtlichen Addition und Skalarmultiplikation), sowie die zwei Untermoduln $U = \mathbb{Z}(-3+\mathrm{i}) := \{\, \lambda(-3+\mathrm{i}) : \lambda \in \mathbb{Z} \,\}$ und $V = \mathbb{Z}(6+2\mathrm{i})$ von $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$.

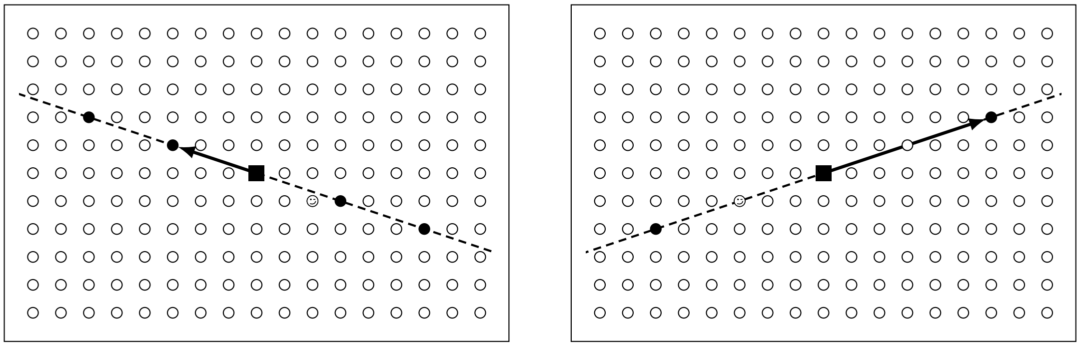
(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ ein freier $\mathbb{Z}$-Modul ist.

(b) Zeigen Sie, dass der Faktormodul $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]/U$ frei ist.

(c) Zeigen Sie, dass der Faktormodul $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]/V$ *nicht* frei ist.
(Hinweis: Kann in einem freien $\mathbb{Z}$-Modul M die Gleichung $\lambda m = 0_M$ mit $\lambda \in \mathbb{Z}\setminus\{0_{\mathbb{Z}}\}$ und $m \in M \setminus \{0_M\}$ gelten?)

Geben Sie Ihre Lösung bitte digital bis zum 16.01.2022, 23:55 Uhr, im zugehörigen TeachCenter-Kurs ab. Dort und auf der Vorlesungswebseite finden Sie auch weitere Informationen.
`https://tc.tugraz.at/main/course/view.php?id=1518`
`https://www.math.tugraz.at/~mtechnau/teaching/2021-w-algebra.html`

Hinweis: Folgendes ist vielleicht hilfreich:



(Gezeichnet sind die Untermoduln U bzw. V [jeweils schwarze Punkte] im Modul $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ [alle Punkte]. Der Nullpunkt ist durch ein Quadrat markiert und die Pfeile deuten jeweils auf $-3+\mathrm{i} \in U$ bzw. $6+2\mathrm{i} \in V$.)

13.3. *(So technisch, dass es wohl ein Hilfssatz sein muss . . .)*
Sei K ein Körper und $B \in K^{n\times n}$ eine beliebige quadratische Matrix. Wir fassen B auch als Matrix über $K[X]$ auf und betrachten die Matrix

$$A = X\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} - B = \begin{pmatrix} X - B_{11} & & -B_{1n} \\ -B_{21} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & -B_{(n-1)n} \\ -B_{n1} & & X - B_{nn} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} | & & | \\ A_{\bullet 1} & \cdots\cdots & A_{\bullet n} \\ | & & | \end{pmatrix}$$

mit Spalten $A_{\bullet 1}, \ldots, A_{\bullet n}$. Sei nun $P = (P_1, \ldots, P_n) \in (K[X])^n$ ein beliebiges Element. Zeigen Sie, dass es Polynome $Q_1, \ldots, Q_n \in K[X]$ und Körperelemente $r_1, \ldots, r_n \in K$ gibt derart, dass

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} Q_j A_{\bullet j} + \begin{pmatrix} r_1 X^0 \\ \vdots \\ r_n X^0 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_1 X^0 \\ \vdots \\ r_n X^0 \end{pmatrix}.$$

(Hinweis: Führen Sie eine Induktion über $\max\limits_{1\le i\le n} \deg P_i$. Für den Induktionsschritt können Sie Polynomdivision benutzen: Ziehen Sie ein geeignetes (polynomielles) Vielfaches einer geeigneten Spalte $A_{\bullet j}$ von P ab, um den Grad eines der P_j-Einträge zu verringern.)