Technische Universität Graz
Institut für Analysis und Zahlentheorie
Marc Technau

Wintersemester 2021
Graz, den 14.01.2022

14. Übung zur Algebra

14.1. *(Artinsche Moduln)*
Sei R ein kommutativer Ring. Ein R-Modul M heißt ***artinsch***, falls jede fallende Kette $M_0 \supseteq M_1 \supseteq \ldots$ von Untermoduln $M_0, M_1, \ldots$ von M ab einem gewissen (ggf. von der Kette abhängigen) Index n stationär wird:

$$M_0 \supseteq M_1 \supseteq \ldots \supseteq M_{n-1} \supseteq M_n = M_{n+1} = M_{n+2} = \ldots \quad \text{(ab hier nur noch Gleichheit!).}$$

(Im Gegensatz zu der Noether-Eigenschaft, wo von aufsteigenden Ketten die Rede ist, geht es hier um absteigende Ketten.) Zeigen Sie:

(a) Für jede kurze exakte Sequenz $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ von R-Moduln ist M genau dann artinsch, wenn dies auf M' und M'' zutrifft.
(Hinweis: Sie können sich am Beweis von Proposition 7.2 (1) orientieren.)

(b) Ist der kommutative Ring R als Modul über sich selbst artinsch, so ist jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von R ein maximales Ideal.
(Hinweis: Folgern Sie zunächst unter der Annahme, dass R artinsch ist, dass auch der Integritätsbereich $R/\mathfrak{p}$ artinsch ist und betrachten Sie in diesem zu einem Element $x \neq 0_{R/\mathfrak{p}}$ von $R/\mathfrak{p}$ die Kette $\langle x \rangle \supseteq \langle x^2 \rangle \supseteq \langle x^3 \rangle \supseteq \ldots$ und folgern Sie, dass x in $R/\mathfrak{p}$ invertierbar ist. Was sagt Ihnen das nun über das Primideal $\mathfrak{p}$?)

14.2. *(Smith Normalform bestimmen, Teil I)*
Betrachen Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{4\times 4}.$$

(a) Bestimmen Sie die Smith-Normalform von A, d.h. finden Sie ganze Zahlen $d_1, \ldots, d_4 \in \mathbb{Z}$ derart, dass es (in $\mathbb{Z}^{4\times 4}$) invertierbare Matrizen $S, T \in \mathbb{Z}^{4\times 4}$ mit

$$SAT = \operatorname{diag}(d_1, d_2, d_3, d_4)$$

gibt und die Teilbarkeitsbedingung $d_i \mid d_{i+1}$ für $i = 1, 2, 3$ erfüllt ist.
(Hinweis: Der Beweis von Satz 7.5 liefert Ihnen ein Verfahren, welches dem aus der

---

Geben Sie Ihre Lösung bitte digital bis zum 23.01.2022, 23:55 Uhr, im zugehörigen TeachCenter-Kurs ab. Dort und auf der Vorlesungswebseite finden Sie auch weitere Informationen.
`https://tc.tugraz.at/main/course/view.php?id=1518`
`https://www.math.tugraz.at/~mtechnau/teaching/2021-w-algebra.html`

linearen Algebra bekannten Verfahren zur Rangbestimmung einer Matrix ähnelt, und Sie auf die gewünschte Diagonalgestalt bringt. Die in der Vorlesung noch nicht besprochenen Schritte des Beweises können Sie schon jetzt im Vorlesungsskriptum nachlesen.)

(b) Bestimmen Sie auch die Matrizen S und T wie in Teil (a).
(Hinweis: Betrachten Sie die Blockmatrix $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & A \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{8\times 8}$, wobei $\mathbf{0} \in \mathbb{Z}^{4\times 4}$ die Nullmatrix und $\mathbf{1} \in \mathbb{Z}^{4\times 4}$ die Einheitsmatrix bezeichne. Führen Sie an dieser ganzen Matrix nun Umformungen durch, welche den A-Teil auf Smith-Normalform D bringen und erhalten Sie so eine Blockmatrix $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & T \\ S & D \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{8\times 8}$; Die Blöcke S und T sollten nun das Gewünschte leisten. — Können Sie sich das erklären? Einen Spezialfall dieses Verfahrens kennen Sie sicher schon aus der linearen Algebra zur Bestimmung der Inversen einer quadratischen Matrix B mit Einträgen aus einem Körper (***Gauß–Jordan-Verfahren***). Hierbei betrachtet man auch die Blockmatrix $(\,\mathbf{1}\; B\,)$ und formt mit Zeilenumformungen um, bis aus dem B-Teil die Einheitsmatrix geworden ist. Im Block daneben steht dann bekanntlich die gesuchte Inverse B^{-1}.)

14.3. *(Smith-Normalform der Transponierten)*
Es sei $A \in R^{n\times m}$ eine beliebige Matrix über einem Hauptidealbereich R. Zeigen Sie, dass A und ihre Transponierte A^{T} diesselbe Smith-Normalform besitzen, in dem Sinne, dass r und die Ideale $\langle d_1\rangle \supseteq \langle d_2\rangle \supseteq \ldots \supseteq \langle d_r\rangle \supsetneq \{0_R\}$ aus Satz 7.5 für A und A^{T} übereinstimmen.

Hinweis: Bei diesem Blatt handelt es sich um das letzte Übungsblatt, dessen Korrektur Punkte zu Ihrer Übungsnote beisteuert. Zusätzlich wird es noch ein 15. Übungsblatt geben, welches allerdings nicht korrigiert werden wird.