TECHNISCHE UNIVERSITÄT GRAZ
INSTITUT FÜR ANALYSIS UND ZAHLENTHEORIE
Marc Technau

Wintersemester 2021
Graz, den 21.01.2022

15. Übung zur Algebra

15.1. *(Erzeuger und Relationen)*
Stellen Sie sich ein Szenario vor, bei dem Sie (aus irgendwelchen Gründen) an einer abelschen Gruppe $(G,+)$ interessiert sind. Im Zuge Ihrer bisherigen Untersuchungen konnten Sie feststellen, dass sich G von den drei (nicht notwendigerweise verschiedenen) Elementen $a,b,c \in G$ erzeugen lässt, und zwischen diesen die folgenden Beziehungen gelten:

$$2a+c=0, \quad 8b-c=0, \quad a-3c=0, \quad a-c=0.$$

(0 bezeichne hier das neutrale Element in G und Ausdrücke wie $2a$ sind natürlich als $a+a$ zu verstehen.) Bestimmen Sie alle möglichen Isomorphietypen von G (im Sinne von Beispiel 6.1), welche die obigen Voraussetzungen erfüllen!
(Hinweis: Sie sollten erwarten hier mehrere mögliche Isomorphietypen zu erhalten, denn immerhin erfüllt schon die einelementige Gruppe alle obigen Voraussetzungen. Wenn man günstig argumentiert, genügt es *eine* Smith-Normalform auszurechnen, um gewissermaßen *das allgemeinste* G zu finden, welches die obigen Voraussetzungen erfüllt, und dann alle gesuchten Isomorphietypen durch Faktorbildung aus diesem allgemeinsten G abzulesen.)

15.2. *(Der Hauptsatz und $\mathbb{Z}$-Moduln)*
Betrachten Sie die Untermoduln $U=\mathbb{Z}(-3+\mathrm{i})$ und $V=\mathbb{Z}(6+2\mathrm{i})$ des $\mathbb{Z}$-Moduls $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ aus Aufgabe 13.2. Bestimmen Sie für $M=\mathbb{Z}[\mathrm{i}]/U$ bzw. $M=\mathbb{Z}[\mathrm{i}]/V$ jeweils Zahlen $k,\ell \in \mathbb{N}_0$ und Ideale $\mathbb{Z}[\mathrm{i}] \supset \mathfrak{a}_1 \supseteq \ldots \supseteq \mathfrak{a}_\ell \supset \{0\}$ (wie aus Satz 8.2 (1)) mit

$$M \cong \mathbb{Z}^k \oplus \bigoplus_{i=1}^{\ell} (\mathbb{Z}/\mathfrak{a}_i).$$

(Hinweis: Zumindest für U kann man die Lösung eigentlich auch schon direkt aus Aufgabe 13.2 entnehmen. Tatsächlich wäre es hier aber eher im Sinne des Aufgabenstellers, wenn Sie einen $\mathbb{Z}$-Modulhomomorphismus $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}^2$ mit $M\cong\mathbb{Z}^2/\operatorname{im} f$ fänden und die gesuchten Kenngrößen an der Smith-Normalform von $[f]_1^2 \in \mathbb{Z}^{2\times 1}$ ablösen.)

15.3. *(In Richtung Jordan-Normalform)*
Es sei K ein Körper und $B \in K^{n\times n}$. Dann wird der K-Vektorraum $V=K^n$ wie in Aufgabe 12.1 zu einem $K[X]$-Modul (den wir zur Unterscheidung als V_B notieren), wobei die

Lösungen und weitere Informationen finden Sie auf der Vorlesungswebseite.
https://tc.tugraz.at/main/course/view.php?id=1518
https://www.math.tugraz.at/~mtechnau/teaching/2021-w-algebra.html

Skalarmultiplikation von X mit $v \in V_B$ wie Anwenden der Matrix B auf den Vektor v wirkt. Betrachten Sie den $K[X]$-Modulhomomorphismus $g\colon (K[X])^n \to V_B$, welcher für $i = 1, \ldots, n$ den i-ten Standardeinheitsvektor von $(K[X])^n$ auf den i-ten Standardeinheitsvektor in V_B abbildet.

(a) Für $K = \mathbb{Q}$, $n = 2$ ist $g(X, 0)$ die erste Spalte von B. — Wieso? Beschreiben Sie in ähnlicher Weise auch, wie das Element $g(X^2 + 1, X - 3) \in V_B$ aussieht.

(b) Zeigen Sie, dass g surjektiv ist, und der Kern von g von den Spalten der Matrix $A := X \cdot \mathbf{1}_n - B \in (K[X])^n$ aus Aufgabe 13.3 erzeugt wird:

$$\ker g = \operatorname{span}_{K[X]} \left\{ \begin{pmatrix} | \\ A_{\bullet 1} \\ | \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} | \\ A_{\bullet n} \\ | \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{im} \begin{pmatrix} (K[X])^n \to (K[X])^n \\ Q \mapsto A \cdot Q \end{pmatrix}.$$

(Hinweis: Mit dem richtigen Hilfssatz ist die Aufgabe fast schon trivial . . .)

(Bemerkung: Die Aufgabe impliziert $V_B \cong (K[X])^n / \operatorname{im}(v \mapsto Av)$. Dies ermöglicht es, den Isomorphietyp von V_B anhand der Smith-Normalform von A abzulesen.)

Hinweis: Auf das vorliegende Blatt ist nicht abzugeben und wird auch nicht bepunktet. Lösungen werden zeitnah auf der Vorlesungswebseite zur Verfügung gestellt.