

1. Tutorium zur Algebra

T1.1. (Ringhomomorphismen)

Zeigen Sie, dass jeder Ringhomomorphismus $f: K \rightarrow R$ von einem Körper K in einen Ring R injektiv ist, sofern es sich bei R nicht um „den“ Nullring handelt. Bleibt die Aussage richtig, wenn man Ringhomomorphismen $R \rightarrow K$ betrachtet?

T1.2. (Der euklidische Algorithmus)

R bezeichne einen euklidischen Ring mit Gradfunktion $\gamma: R \setminus \{0_R\} \rightarrow \mathbb{N}_0$. Zu je zwei Elementen $r_0, r_1 \in R \setminus \{0_R\}$ mit $\gamma(r_0) \geq \gamma(r_1)$ finde man mittels Division mit Rest Elemente $q_1, r_2 \in R$ mit $r_0 = q_1 r_1 + r_2$ und wiederhole diesen Prozess, solange der Rest von Null verschieden ist, z.B. für $(r_0, r_1) = (246, 77)$ in $\mathbb{Z}$ mit $\gamma = |\cdot|$:

$$\begin{cases} 246 = 3 \cdot 77 + 15, \\ 77 = 5 \cdot 15 + 2, \\ 15 = 7 \cdot 2 + 1, \\ 2 = 2 \cdot 1 + 0. \end{cases}$$

Da die γ -Werte der Reste streng monoton fallen und durch 0 nach unten beschränkt sind, terminiert der oben beschriebene Prozess; d.h. es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ derart, dass die beschriebene Division mit Rest die Form $r_{n-1} = q_n r_n + 0$ annimmt. Man kann zeigen, dass r_n ein größter gemeinsamer Teiler von r_0 und r_1 ist.

(a) Führen Sie den obigen Prozess für $(r_0, r_1) = (60, 26)$ durch.

(b) Durch Umstellen der obigen Gleichungen (mit der vorletzten Gleichung anfangen) kann man Elemente $x, y \in R$ mit $r_n = x r_0 + y r_1$ finden, z.B.

$$\begin{aligned} 1 &= 15 - 7 \cdot 2 = 15 - 7 \cdot (77 - 5 \cdot 15) = (1 + 7 \cdot 5) \cdot 15 - 7 \cdot 77 \\ &= 36 \cdot (246 - 3 \cdot 77) - 7 \cdot 77 = 36 \cdot 246 - (36 \cdot 3 + 7) \cdot 77 = 36 \cdot \underline{246} - 115 \cdot \underline{77}. \end{aligned}$$

Benutzen Sie Ihre Lösung aus Teil (a), um $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $\text{ggT}(60, 26) = 60x + 26y$ zu finden.

(c) Bestimmen Sie ein $z \in \mathbb{Z}$ mit $z \cdot 13 \equiv 1 \pmod{30}$.