TECHNISCHE UNIVERSITÄT GRAZ
INSTITUT FÜR ANALYSIS UND ZAHLENTHEORIE
Marc Technau

Sommersemester 2023
Graz, den 09.03.2023

2. Übung zur Einführung in die Algebra

2.1. *(Untergruppen endlicher Gruppen)* (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie: für eine endliche Gruppe $(G, \circ)$ ist eine Teilmenge U von G genau dann eine Untergruppe von G, wenn 1_G in U enthalten ist und für je zwei Elemente $a, b \in U$ deren Produkt $a \circ b$ in U liegt.

(b) Gilt die Aussage aus Teil (a) auch noch, wenn man von $(G, \circ)$ nicht mehr voraussetzt endlich zu sein? (Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.)

2.2. *(Turmsatz für den Index)* (4 Punkte)

Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit Untergruppen $V \leq U \leq G$. Ferner seien

$$G = \dot\bigcup_n a_n U, \quad U = \dot\bigcup_m b_m V,$$

disjunkte Zerlegungen von G und U in Linksnebenklassen. (Die Indizes n und m mögen hier jeweils geeignete Indexmengen durchlaufen.) Zeigen Sie:

(a) $G = \dot\bigcup_{n,m} a_n b_m V$.

(b) $[G : V] = [G : U][U : V]$, falls G endlich ist.

2.3. *(Zyklische Gruppen)*

Es seien $n, m \in \mathbb{N}$; $(C_n, \oplus)$ bezeichne die Gruppe aus § 1.2.2. Ferner sei t ein Teiler von n und $\varphi(t)$ bezeichne die Anzahl der natürlichen Zahlen k mit $1 \leq k \leq t$ und $\operatorname{ggT}(t, k) = 1$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Das direkte Produkt $C_n \times C_m$ ist genau dann zyklisch, wenn n und m teilerfremd sind.

(b) In C_n gibt es genau $\varphi(t)$ Elemente der Ordnung t. (Das ist Satz 1.12 (2).)

(Hinweis: Schlagen Sie Lemma 1.9 und Satz 1.12 (1) im Skriptum nach. Sie dürfen beide Ergebnisse benutzen. Für die auf $C_n \times C_m$ definierte Gruppenstruktur, siehe § 1.2.4 im Skriptum.)

2.4. *(Untergruppen von $(\mathbb{Z}, +)$)*

Beweisen Sie Proposition 1.11:

(a) Die Untergruppen von $(\mathbb{Z}, +)$ sind genau die Mengen $n\mathbb{Z} = \{nz : z \in \mathbb{Z}\}$ mit $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) Für $m, n \in \mathbb{Z}$ gilt: $m\mathbb{Z} \supseteq n\mathbb{Z} \iff m$ teilt n. („Teilen heißt Enthalten.“)

Geben Sie Ihre Lösung bitte am 16.03.2023 vor der Vorlesung ab.
https://www.math.tugraz.at/~mtechnau/teaching/2023-s-einf-algebra.html