

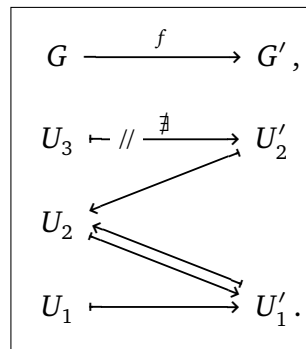
3. Übung zur Einführung in die Algebra

3.1. (Untergruppenverbände und Homomorphismen) (4 Punkte)

Bekanntlich induziert jeder Gruppenhomomorphismus $f : G \rightarrow G'$ Abbildungen

$$\{\text{Untergruppen } U \text{ von } G\} \begin{array}{c} \xrightarrow{U \mapsto f(U)} \\ \xleftarrow{f^{-1}(U') \leftarrow U'} \end{array} \{\text{Untergruppen } U' \text{ von } G'\}.$$

(Siehe Proposition 2.3 (4).) Finden Sie Gruppen G und G' , sowie einen Gruppenhomomorphismus $f : G \rightarrow G'$ derart, dass es Untergruppen $U_1, U_2 \leq G$ und $U'_1, U'_2 \leq G'$ gibt, sodass f das folgende Abbildungsverhalten induziert:



D.h. es soll Folgendes gelten:

- $f(U_1) = U'_1$,
- $f^{-1}(U'_1) = U_2 = f^{-1}(U'_2)$,
- es gibt keine Untergruppe U_3 von G mit $f(U_3) = U'_2$.

3.2. (Mehr zum Komplexprodukt) (4 Punkte)

Seien U und V Untergruppen einer Gruppe G . Zeigen Sie:

- Die Menge UV ist genau dann eine Untergruppe von G , wenn $UV = VU$ gilt.
- Ist U ein Normalteiler von G , so gilt $\langle U \cup V \rangle = UV = VU$.
- Sind U und V endlich, so gilt $\#(UV) = \frac{\#U \cdot \#V}{\#(U \cap V)}$.

Geben Sie Ihre Lösung bitte am 23.03.2023 bis 12:00 Uhr bei Michael Muhr im Sekretariat Analysis-Zahlentheorie ab (Kopernikusgasse 24/II, Raum NT-02-004).

<https://www.math.tugraz.at/~mtechnau/teaching/2023-s-einf-algebra.html>

3.3. (Einige Automorphismengruppen)

Bestimmen Sie zu jeder der folgenden Gruppen jeweils eine „bekannte“ Gruppe, zu welcher diese isomorph ist:

(a) $\text{Aut}(C_2)$,

(b) $\text{Aut}(C_4)$,

(c) $\text{Aut}(C_2 \times C_2)$.

(Hinweis: hier gilt $\#\text{Aut}(C_2 \times C_2) > 4 = \#(C_2 \times C_2)$.)

3.4. (Semidirekte Produkte)

Seien (G, \bullet) und $(H, *)$ Gruppen und $\varphi : H \rightarrow \text{Aut}(G)$ ein Gruppenhomomorphismus. Wir betrachten die binäre innere Verknüpfung

$$\star : (G \times H) \times (G \times H) \rightarrow G \times H, \quad ((g, h), (g', h')) \mapsto (g \bullet \varphi(h)(g'), h * h')$$

auf $G \times H$. Zeigen Sie:

(a) Die Menge $G \times H$ bildet zusammen mit \star eine Gruppe, das sogenannte **semidirekte Produkt von G mit H bezüglich φ** . (Man schreibt hierfür $G \rtimes_{\varphi} H$, um diese vom direkten Produkt $G \times H$ zu unterscheiden, oder kurz $G \rtimes H$, falls der Bezug auf φ klar ist.)

(b) Es sind $G \times \{1_H\} \trianglelefteq G \rtimes H$ und $\{1_G\} \times H \leq G \rtimes H$.

(c) $\{1_G\} \times H \trianglelefteq G \rtimes H$ genau dann wenn $\varphi(h) = \text{id}_G$ für alle $h \in H$ ist, d.h. wenn φ der triviale Homomorphismus $H \rightarrow \text{Aut}(G)$ ist.

(d) Ist $N \trianglelefteq G$ und $U \leq G$ mit $N \cap U = \{1_G\}$, so ist $NU \cong N \rtimes_{\varphi} U$ für $\varphi \in \text{Hom}(U, \text{Aut}(N))$ gegeben durch $\varphi(u) = n \mapsto un u^{-1}$.

Hinweis: am Donnerstag, den 23.03.2023, **entfällt die Vorlesung**. Bitte beachten Sie auch den dementsprechend **veränderten Abgabeort** (Büro von Michael Muhr; siehe Fußnote auf der ersten Seite).