Technische Universität Graz
Institut für Analysis und Zahlentheorie
Marc Technau

Sommersemester 2023
Graz, den 23.03.2023

4. Übung zur Einführung in die Algebra

4.1. *(Korrespondenzsatz)*
Beweisen Sie Satz 2.9: es sei G eine Gruppe, $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler von G und $\pi\colon G \to G/N$, $g \mapsto gN$, bezeichne die kanonische Projektion. Dann handelt es sich bei der Abbildung

$$^{\mathrm{a}}\pi\colon \begin{cases} \{\text{Untergruppen } U \leq G/N\} \to \{\text{Untergruppen } V \leq G \text{ mit } V \supseteq N\}, \\ \qquad\qquad\qquad U \mapsto \pi^{-1}(U), \end{cases}$$

um eine inklusionserhaltende[1] Bijektion, welche sich zu einer Bijektion

$$\{\text{Normalteiler } U \trianglelefteq G/N\} \xrightarrow{1:1} \{\text{Normalteiler } V \trianglelefteq G \text{ mit } V \supseteq N\}$$

einschränkt.

4.2. *(Zweiter Isomorphiesatz)*
Beweisen Sie Satz 2.11: es sei G eine Gruppe, $U \leq G$ und $N \trianglelefteq G$. Dann ist auch $UN \leq G$ und $U \cap N \trianglelefteq U$ sowie $UN/N \cong U/(U \cap N)$.
Hinweis: für die gefragte Isomorphie, betrachten Sie das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen und Spalten, wobei die gezeichneten Pfeile die „offensichtlichen“ Homomorphismen bedeuten sollen:

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & U \cap N \arrow[r, hook, "\text{Inkl.}"] \arrow[d, hook, "\text{Inkl.}"] & U \arrow[r] \arrow[d, hook, "\text{Inkl.}"] & U/(U \cap N) \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\exists?"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, hook, "\text{Inkl.}"] & UN \arrow[r] & UN/N \arrow[r] & 0\,.
\end{tikzcd}$$

4.3. *(Auf der Jagd nach einem Beweis)* (4 Punkte)
Gegeben sei das folgende kommutative Diagramm von Gruppen und Gruppenhomomor-

Geben Sie Ihre Lösung bitte am 30.03.2023 vor der Vorlesung ab.
`https://www.math.tugraz.at/~mtechnau/teaching/2023-s-einf-algebra.html`

[1] „*Inklusionserhaltend*“ heißt hier: $U \leq U' \leq G/N$ impliziert $^{\mathrm{a}}\pi(U) \subseteq {}^{\mathrm{a}}\pi(U')$.

phismen

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\gamma"] & D \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\delta"] & E \arrow[d, "\varepsilon"] \\
A' \arrow[r, "f'"] \arrow[d] & B' \arrow[r, "g'"] \arrow[d] & C' \arrow[r, "h'"] & D' \arrow[r, "i'"] \arrow[d] & E' \\
0 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

mit exakten Zeilen und exakten Spalten. Zeigen Sie, dass der darin gezeichnete Gruppenhomomorphismus $C \to C'$ ein Gruppenisomorphismus ist.
(Hinweis: führen Sie Diagrammjagd durch. Beispielsweise zum Nachweis der Injektivität von γ, starten Sie mit einem Element $c \in \ker \gamma \subseteq C$ und zeigen Sie dann $c = 1_C$. Hierzu sollten Sie zeigen, dass sogar $h(c) = 1_D$ gilt und es darum, vermöge Exaktheit, ein $b \in B$ mit $g(b) = c$ gibt. Wenn Sie nun auch noch sehen, dass es ein $a \in A$ mit $f(a) = g(b)$ gibt, so käme $c = g(f(a)) = (g \circ f)(a) = 1_C$ wegen Exaktheit.)

4.4. *(Größter gemeinsamer Teiler und kleinstes gemeinsames Vielfaches)* (4 Punkte)
Es seien $m, n \in \mathbb{N}_0$ und $a, b \in \mathbb{N}$ beliebig mit $a \mid b$. Das ***kleinste gemeinsame Vielfache*** $\mathrm{kgV}(m,n)$ von m und n ist $\mathrm{kgV}(m,n) = \min(m\mathbb{N} \cap n\mathbb{N})$, falls die Menge, deren Minimum auf der rechten Seite betrachtet nicht leer ist und $\mathrm{kgV}(m,n) = 0$ sonst.

(a) Zeigen Sie $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = \mathrm{ggT}(m,n)\mathbb{Z}$ und $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} = \mathrm{kgV}(m,n)\mathbb{Z}$.

(b) Benutzen Sie Satz 2.12, um $\#(a\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}) = b/a$ zu zeigen.

(c) Benutzen Sie Satz 2.11, um $\mathrm{ggT}(m,n)\,\mathrm{kgV}(m,n) = mn$ zu zeigen.