Technische Universität Graz
Institut für Analysis und Zahlentheorie
Marc Technau

Sommersemester 2023
Graz, den 30.03.2023

5. Übung zur Einführung in die Algebra

5.1. *(Opponierte Gruppen und Rechtsoperationen)*
Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und M eine beliebige Menge. Zeigen Sie:

(a) Die Menge G bildet zusammen mit der Verknüpfung $\bullet\colon G \times G \to G$, $(a, b) \mapsto b \circ a$, eine Gruppe. (Diese Gruppe wird zur Abgrenzung von G auch mit G^{op} bezeichnet und heißt die ***opponierte Gruppe zu G***.)

(b) Die identische Abbildung $G^{\mathrm{op}} \to G$, $g \mapsto g$, ist genau dann ein Gruppenisomorphismus zwischen $(G^{\mathrm{op}}, \bullet)$ und $(G, \circ)$ wenn G abelsch ist.

(c) Es gilt $G^{\mathrm{op}} \cong G$ (sogar wenn G nicht abelsch ist).

(d) Übertragen Sie die Überlegungen aus Proposition 2.13, um eine Bijektion zwischen Gruppen-*Rechts*-Operationen $\triangleleft\colon M \times G \to M$ und der Menge $\mathrm{Hom}(G^{\mathrm{op}}, \mathrm{Sym}(M))$ zu gewinnen.

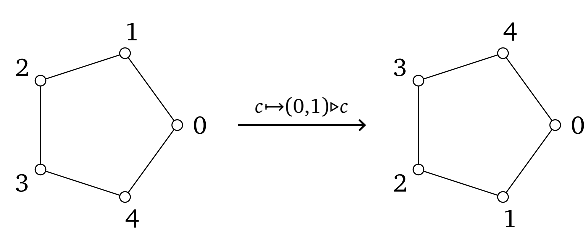
5.2. *(Diedergruppen)*
Im Folgenden sei $n \geq 3$. Ferner bezeichne $\varphi\colon C_2 \to \mathrm{Aut}(C_n)$ den Gruppenhomomorphismus mit $\varphi(0) = \mathrm{id}_{C_n}$ und $\varphi(1) = (x \mapsto -x) \in \mathrm{Aut}(C_n)$.

(a) Es sei $D_{2n} := C_n \rtimes_\varphi C_2$ das semidirekte Produkt von C_n mit C_2 bezüglich φ aus Teil (a) zusammen mit der Verknüpfung $\star$ (vgl. Aufgabe 3.4). Zeigen Sie, dass D_{2n} via

$$(a, b) \triangleright c := \text{erste Koordinate von } ((a, b) \star (c, 0))$$

treu und transitiv auf C_n operiert.

(b) Beschriften Sie für $n \in \{4, 5\}$ die Seiten eines regelmäßigen n-Ecks der Reihe nach mit den Elementen $0, 1, \ldots, n-1$ von C_n und skizzieren Sie, wie die Elemente von D_{2n} darauf operieren, zum Beispiel für das Element $(0, 1) \in D_{2n}$:



(c) Interpretieren Sie (für beliebige $n \geq 3$) die Operation von D_{2n} auf C_n geometrisch.

Geben Sie Ihre Lösung bitte am 20.04.2023 vor der Vorlesung ab.
https://www.math.tugraz.at/~mtechnau/teaching/2023-s-einf-algebra.html

5.3. *(Struktur von (kleinen) p-Gruppen)* (4 Punkte)

In dieser Aufgabe soll Korollar 2.20 bewiesen werden. G bezeichne eine endliche Gruppe, p sei eine Primzahl und n sei eine natürliche Zahl. Zeigen Sie dann die folgenden Aussagen:

(a) Hat G Ordnung p^n, so hat G ein nichttriviales Zentrum: $Z(G) \supsetneq \{1_G\}$.
(Hinweis: benutzen Sie die Klassengleichung, Korollar 2.19.)

(b) Ist $G/Z(G)$ zyklisch, so ist G abelsch.

(c) Ist $N \leq G$ mit $[G : N] = 2$, so ist $N \trianglelefteq G$.

(d) Hat G Ordnung p^2, so ist G abelsch und es gilt $G \cong C_{p^2}$ oder $G \cong C_p \times C_p$.

5.4. *(Operationen und Symmetrien)* (4 Punkte)

Bei dem unten abgebildeten Objekt handelt es sich um ein von Paolo Bascetta entworfenes modulares Origami-Modell eines Sterns. Es bezeichne G die Gruppe der Drehungen des dreidimensionalen Raumes, welche den Bascetta-Stern $\mathscr{B} \subseteq \mathbb{R}^3$ invariant lassen, wobei $\mathscr{B}$ als angemessen idealisiert anzusehen ist, sodass Faltungenauigkeiten vernachlässigt werden können.

(a) Falten Sie einen Bascetta-Stern gemäß der im TeachCenter-Kurs verfügbaren Anleitung.
(Hinweis: Auf einschlägigen Videoplattformen findet man ebenfalls Anleitungen. Es gibt 2 Bonuspunkte für die Gruppe, welche den kleinsten Stern abgibt und 2 Bonuspunkte für die Gruppe, die den größten Stern abgibt. Falls sich keine solche Gruppe eindeutig identifizieren lässt, verfallen die jeweiligen Bonuspunkte. Pro Gruppe darf nur ein Stern abgegeben werden.)

(b) Zeigen Sie, dass G treu auf $\mathscr{B}$ operiert und endlich ist.

(c) Bestimmen Sie die Ordnung von G.