TECHNISCHE UNIVERSITÄT GRAZ
INSTITUT FÜR ANALYSIS UND ZAHLENTHEORIE
Marc Technau

Sommersemester 2023
Graz, den 20.04.2023

6. Übung zur Einführung in die Algebra

6.1. *(Färbungen eines Quadrats)*
Die Gruppen C_4 und $D_{2\cdot 4}$ operieren auf den Ecken E eines Quadrats durch Drehung bzw. Drehung und Spiegelung (vgl. das Beispiel über Satz 2.16, sowie Aufgabe 5.2).

(a) Bestimmen Sie die Anzahl der verschiedenen Färbungen von E mit drei[1] Farben unter der Operation von C_4.

(b) Bestimmen Sie die Anzahl der verschiedenen Färbungen von E mit drei Farben unter der Operation von $D_{2\cdot 4}$.

(c) Geben Sie zwei Färbungen von E mit drei Farben an, welche unter der Operation von C_4 zu verschiedenen Bahnen gehören, aber bezüglich der Operation von $D_{2\cdot 4}$ in derselben Bahn liegen.

6.2. *(Untergruppen von $\mathfrak{S}_5$)* (4 Punkte)

(a) Finden Sie ein Element $\sigma \in \mathfrak{S}_5$ mit Ordnung 6.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{S}_5$ kein Element mit Ordnung 15 enthält.
(Hinweis: für $\sigma \in \mathfrak{S}_5$ operiert die Gruppe $\langle \sigma \rangle$ auf $M = \{1, \ldots, 5\}$ durch Funktionsauswertung. Überlegen Sie sich, wie die Ordnung von σ mit den Bahnen zusammenhängt, in welche M unter der genannten Operation zerfällt.)

(c) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{S}_5$ keine Untergruppe der Ordnung 15 enthält, obwohl 15 ein Teiler von $\#\mathfrak{S}_5 = 5! = 120 = 15 \cdot 8$ ist.
(Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis die aus Proposition 3.5 folgende Tatsache benutzen, dass jede Gruppe der Ordnung 15 zyklisch ist.)

6.3. *(Exponentialbewertung)* (4 Punkte)
Es sei p eine Primzahl. Für $n \in \mathbb{Z}$ definiere dann $\nu_p(n) := \sup\{\, \nu \in \mathbb{N}_0 : p^\nu \text{ teilt } n \,\}$. (Für alle $n \neq 0$ darf man „sup“ durch „max“ ersetzen; für $n = 0$ hat man $\nu_p(0) = +\infty$.)

(a) Zeigen Sie: für $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt $\nu_p(ab) = \nu_p(a) + \nu_p(b)$.
(Hinweis: Für $ab = 0$ gilt die obige Gleichung bei richtiger Konventionswahl auch, Sie dürfen sich aber auf den Fall $ab \neq 0$ beschränken. „$\geq$“ ist nicht schwierig. Für die umgekehrte Ungleichung kann man mittels Lemma 3.2 argumentieren.)

(b) Im Beweis von Satz 3.1 kam die folgende Aussage vor (mit Notation wie dort):

Geben Sie Ihre Lösung bitte am 27.04.2023 vor der Vorlesung ab.
https://www.math.tugraz.at/~mtechnau/teaching/2023-s-einf-algebra.html

[1] Färbungen, bei denen nicht alle drei Farben wirklich benutzt werden, sollen hier ebenfalls gezählt werden.

$G(\mathscr{M}_0)$ sei eine Bahn, deren Länge $\#G(\mathscr{M}_0) = [G : G_{\mathscr{M}_0}] = \#G/\#G_{\mathscr{M}_0}$ nicht durch p^{r+1} geteilt wird. Dann ist p^n ein Teiler von $\#G_{\mathscr{M}_0}$.

Benutzen Sie (a), um die oben gemachte Aussage über Teilbarkeit von $\#G_{\mathscr{M}_0}$ durch p^n zu begründen.

6.4. *(Gruppen der Ordnung 12)*

(a) Zeigen Sie, dass jede Gruppe G der Ordnung 12 einen Normalteiler $N \neq \{1_G\}, G$ besitzt. (Hinweis: Überlegen Sie sich mittels Satz 3.3 (3), wie 2- bzw. 3-Sylowgruppen es in G geben kann. Überlegen Sie sich ferner, wie viele Sylowgruppen in G überhaupt Platz haben. Um Normalität einer Sylowgruppe zu folgern, dürfen Sie Korollar 3.4 benutzen.)

(b) Es bezeichne P_2 eine 2-Sylowgruppe von G und P_3 sei eine 3-Sylowgruppe von G. Geben Sie für jeden der folgenden drei Fälle ein Beispiel (mit Begründung!) für eine Gruppe G mit Ordnung 12 und den geforderten Eigenschaften an:

$$(1)\ \ P_2 \trianglelefteq G \text{ und } P_3 \trianglelefteq G, \quad (2)\ \ P_2 \trianglelefteq G \text{ und } P_3 \ntrianglelefteq G, \quad (3)\ \ P_2 \ntrianglelefteq G \text{ und } P_3 \trianglelefteq G.$$