TECHNISCHE UNIVERSITÄT GRAZ
INSTITUT FÜR ANALYSIS UND ZAHLENTHEORIE
Marc Technau

Sommersemester 2023
Graz, den 27.04.2023

7. Übung zur Einführung in die Algebra

7.1. *(Gruppen der Ordnung* 324 *und Einfachheit)*
Zeigen Sie, dass es keine einfache Gruppe G mit Ordnung $324 = 2^2\,3^4$ gibt.
(Hinweis: falls die Anzahlbetrachtung der Sylowgruppen von G nicht ausreichen, betrachten Sie die Operation von G auf $\mathrm{Syl}_3\, G$ durch Konjugation. Kann diese Operation treu sein?)

7.2. *(Erzeugen von $\mathfrak{S}_n$)*
Es sei $n \geq 2$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\mathfrak{S}_n = \langle (1\ 2), (1\ 3), \ldots, (1\ n) \rangle$;

(b) $\mathfrak{S}_n = \langle (1\ 2), (2\ 3), (3\ 4), \ldots, ((n-1)\ n) \rangle$;

(c) $\mathfrak{S}_n = \langle \sigma, \tau \rangle$ mit $\sigma = (1\ 2\ 3\ \ldots\ n)$ und $\tau = (1\ 2)$;

(d) Ist n prim, so kann man in (c) sogar $\tau = (r\ s)$ mit beliebigen $1 \leq r < s \leq n$ wählen.

(Hinweis: benutzen Sie, dass $\mathfrak{S}_n$ von allen Transpositionen erzeugt wird; Konjugation könnte helfen. Falls Sie noch keine richtige Idee haben, mag es helfen, für $n = 4$ oder $n = 5$ konkrete Rechnungen anzustellen.)

7.3. *(A_n ist einfach für $n \geq 5$)*
Es bezeichne A_n die alternierende Gruppe in $\mathfrak{S}_n = \mathrm{Sym}(\{1, \ldots, n\})$. Zeigen Sie:

(a) Für $n \geq 3$ wird A_n von den 3-Zyklen erzeugt.
(Hinweis: welche Zyklen entstehen als das Produkt zweier Transpositionen?)

(b) Für $n \geq 5$ sind alle 3-Zyklen konjugiert in A_n.
(Hinweis: die fragliche Konjugiertheit in $\mathfrak{S}_n$ ist *a-priori* einfacher einzusehen. Kann man daraus nun die Konjugiertheit in A_n gewinnen? Beachten Sie, dass die Voraussetzung $n \geq 5$ einem zu jedem 3-Zyklus zwei permutierbare Zahlen zur Verfügung stellt, die nicht in selbigem 3-Zyklus vorkommen.)

(c) Satz 4.7: für $n \geq 5$ ist A_n einfach.
(Hinweis: sei $N \neq \{\mathrm{id}_{\{1,\ldots,n\}}\}$ ein Normalteiler von A_n. Betrachten Sie ein Element $\sigma \neq \mathrm{id}_{\{1,\ldots,n\}}$ von N, welches maximal viele Elemente von $\{1, \ldots, n\}$ fixiert, und zeigen Sie dann, dass σ ein 3-Zyklus sein muss. Hierbei hilft es erneut, in disjunkte Zyklen zu zerlegen. Folgern Sie anschließend $N = A_n$.)

7.4. *(Untergruppen von $\mathfrak{S}_n$)* (4 Punkte)
Zeigen Sie für $n \geq 2$, dass A_n die einzige Untergruppe von $\mathfrak{S}_n$ mit Index 2 ist.

Geben Sie Ihre Lösung bitte am 04.05.2023 vor der Vorlesung ab.
https://www.math.tugraz.at/~mtechnau/teaching/2023-s-einf-algebra.html