TECHNISCHE UNIVERSITÄT GRAZ
INSTITUT FÜR ANALYSIS UND ZAHLENTHEORIE
Marc Technau

Sommersemester 2023
Graz, den 04.05.2023

8. Übung zur Einführung in die Algebra

8.1. *(Normalteiler von $\mathfrak{S}_n$)*
Bestimmen Sie alle Normalteiler von $\mathfrak{S}_n$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$.
(Hinweis: für $n \geq 5$ betrachten Sie den Schnitt $N \cap A_n$ eines Normalteilers N von $\mathfrak{S}_n$ mit A_n und benutzen Sie Aufgabe 8.2. Für kleinere n finden Sie die Lösung in § 4.1 der Vorlesungsnotizen. Ihr Beweis sollte sich aber nicht darauf stützen, dass man dort den vollständigen Untergruppenverband von $\mathfrak{S}_3$ oder $\mathfrak{S}_4$ sieht, es sei denn, Sie leiten sich diesen eigenständig her.)

8.2. *(Untergruppen von $\mathfrak{S}_n$)*

(a) Es sei U eine echte Untergruppe einer endlichen Gruppe G derart, dass U keinen nichttrivialen Normalteiler enthält. Mit G/U sei die Menge der Linksnebenklassen von G bezeichnet. Zeigen Sie, dass G isomorph zu einer Untergruppe von $\mathrm{Sym}(G/U)$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass für $n \geq 5$ der Index $[\mathfrak{S}_n : U]$ jeder echten Untergruppe $U \neq A_n$ von $\mathfrak{S}_n$ die Ungleichung $[\mathfrak{S}_n : U] \geq n$ erfüllt.

8.3. *(Ein Zyklizitätskriterium für endliche abelsche Gruppen)* (4 Punkte)
Es sei G eine endliche abelsche Gruppe. Zeigen Sie, dass G genau dann zyklisch ist, wenn es für jeden Primteiler p von $\#G$ höchstens $p-1$ Elemente der Ordnung p in G gibt.

8.4. *(Adjunktion)* (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, der kleinste Teilring von $\mathbb{C}$, welcher $\mathbb{Q} \cup \{\sqrt{2}\}$ enthält, sogar ein Körper ist.

(b) Es sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl, welche Nullstelle keines nicht-konstanten Polynoms mit rationalen Koeffizienten ist (d.h. für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}$ mit $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\} \neq \{0\}$ ist $a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_n\alpha^n \neq 0$). Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}[\alpha]$ kein Körper ist.

Geben Sie Ihre Lösung bitte am 11.05.2023 vor der Vorlesung ab.
https://www.math.tugraz.at/~mtechnau/teaching/2023-s-einf-algebra.html