TECHNISCHE UNIVERSITÄT GRAZ
INSTITUT FÜR ANALYSIS UND ZAHLENTHEORIE
Marc Technau

Sommersemester 2023
Graz, den 11.05.2023

9. Übung zur Einführung in die Algebra

9.1. *(Einheitengruppe von $\mathbb{Z}/2^\nu\mathbb{Z}$)*
Es sei $\nu \in \mathbb{N} \setminus \{1,2\}$ und $(\mathbb{Z}/2^\nu\mathbb{Z})^\times$ bezeichne die Einheitengruppe des Rings $\mathbb{Z}/2^\nu\mathbb{Z}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ mit $5^{2^{\nu-2}} = 1 + m2^\nu$. (Hinweis: Induktion über ν.)

(b) Für $\nu \geq 2$ liegt $5 \bmod 2^\nu$ in $(\mathbb{Z}/2^\nu\mathbb{Z})^\times$ und hat die Ordnung $2^{\nu-2}$.

(c) Für $\nu \geq 2$ ist $(\mathbb{Z}/2^\nu\mathbb{Z})^\times \cong C_2 \times C_{2^{\nu-2}}$.
(Hinweis: finden Sie zunächst zwei verschiedene Elemente von $(\mathbb{Z}/2^\nu\mathbb{Z})^\times$ mit Ordnung 2. Überlegen Sie sich dann, welche Möglichkeiten für $q_1, \ldots, q_t$ in Satz 5.3 im vorliegenden Fall in Frage kommen.)

9.2. *(Endliche Integritätsbereiche sind Körper)* (4 Punkte)
R sei ein ***Integritätsbereich***, d.h. ein kommutativer Ring ungleich dem Nullring, sodass für alle $a, b \in R$ aus $ab = 0_R$ schon $a = 0_R$ oder $b = 0_R$ folgt.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $a \in R \setminus \{0_R\}$ die Abbildung $R \to R$, $b \mapsto ab$, injektiv ist.

(b) Folgern Sie: ist $\#R < \infty$, so ist R ein Körper.

9.3. *(Operationen mit Idealen)*
Es seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei Ideale eines Rings R. Betrachten Sie das *Komplexprodukt* $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} := \{ab : a \in \mathfrak{a},\ b \in \mathfrak{b}\}$, sowie das ***Idealprodukt*** $\mathfrak{a}\mathfrak{b} := \langle \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \rangle$ von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$. Zeigen Sie:

(a) $\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2$ braucht im Allgemeinen kein Ideal von R zu sein (Beispiel!).

(b) $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ und im Allgemeinen kann hierbei strikte Inklusion „$\subset$“ gelten (Beispiel!).

(c) Gilt $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = R$ und ist R kommutativ, so ist $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$.

9.4. *(Ringe in der Topologie)* (4 Punkte)
Es sei X ein kompakter Hausdorff-Raum. (Falls Sie damit nicht vertraut sind, dürfen Sie X durch das Intervall $[0,1]$ ersetzen.) Es sei R der Ring der *stetigen*, reellwertigen Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ mit punktweise definierter Addition & Multiplikation. Zeigen Sie:

(a) Für $x \in X$ ist $\mathfrak{m}_x = \{f \in R : f(x) = 0\}$ ein maximales Ideal von R.

(b) Haben $f_1, \ldots, f_n \in R$ keine gemeinsame Nullstelle (d.h. es gibt kein $x \in X$ mit $f_1(x) = \ldots = f_n(x) = 0$), so ist $\langle f_1, \ldots, f_n \rangle = \langle 1 \rangle = R$.

(c) Jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von R ist von der Form $\mathfrak{m}_x$ für ein $x \in X$.

Geben Sie Ihre Lösung bitte am 17.05.2023 vor der Vorlesung ab.
`https://www.math.tugraz.at/~mtechnau/teaching/2023-s-einf-algebra.html`

(d) Die Zuordnung $x \mapsto \mathfrak{m}_x$ stiftet eine Bijektion zwischen X und der Menge der maximalen Ideale von R. (Hinweis: Benutzen Sie das Lemma von Urysohn aus der Topologie, falls Sie dieses kennen, oder schränken Sie Ihre Betrachtung hier auf $X = [0, 1]$ ein.)

Hinweis: am Donnerstag, den 18.05.2023, **entfällt** die **Vorlesung** (wg. Christi Himmelfahrt). Bitte geben Sie Ihre **Lösungen** daher schon am **Mittwoch**, den 17.05.2023, vor der Vorlesung ab.