

11. Übung zur Einführung in die Algebra

11.1. (Primideale, Teil II)

Es sei $f : R \rightarrow S$ Homomorphismus zwischen kommutativen Ringen R und S .

- (a) Zeigen Sie: ist \mathfrak{p} ein Primideal von S , so ist das Urbild $f^{-1}(\mathfrak{p})$ ein Primideal von R .
- (b) Belegen Sie durch ein Beispiel, dass das Urbild $f^{-1}(\mathfrak{m})$ eines maximalen Ideals \mathfrak{m} von S nicht maximal in R zu sein braucht.

11.2. (Struktur von $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$)

(4 Punkte)

Es sei $G := (\mathbb{Z}/540\mathbb{Z})^\times$. Wegen $540 = 2^2 3^3 5$, Korollar 6.18 und Satz 6.21 ist $(\mathbb{Z}/540\mathbb{Z})^\times \cong C_2 \times C_{18} \times C_4$. Finden Sie Elemente $a, b, c \in G$ mit $\text{ord}(a) = 2$, $\text{ord}(b) = 18$ und $\text{ord}(c) = 4$ und $\{1_G\} = \langle a \rangle \cap \langle b, c \rangle = \langle b \rangle \cap \langle a, c \rangle = \langle c \rangle \cap \langle a, b \rangle$.

11.3. (Universelle Eigenschaft von $R[X]$)

(4 Punkte)

Es sei $i : R \rightarrow A$ ein Homomorphismus zwischen kommutativen Ringen und $x \in A$ sei fixiert. Ferner gelte die folgende Aussage: für jeden Ringhomomorphismus $f : R \rightarrow S$ in einen kommutativen Ring S und jedes $s \in S$ gibt es genau einen Ringhomomorphismus $F : A \rightarrow S$ mit $F(x) = s$, der das folgende Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\exists! F} & S \\ i \uparrow & \searrow f & \\ R & & \end{array}$$

Zeigen Sie, dass A isomorph zum Polynomring $R[X]$ ist.

11.4. (Multivariate Polynome)

Es bezeichne I eine beliebige Indexmenge und $M = \mathbb{N}_0^{(I)}$ sei die Menge aller Abbildungen $I \rightarrow \mathbb{N}_0$, die für alle bis auf höchstens endlich viele Indizes aus I den Wert 0 annehmen, zusammen mit punktweise definierter Addition. Für einen kommutativen Ring R sei $R[M]$ die Menge aller Abbildungen $M \rightarrow R$, welche auf allen bis auf höchstens endlich vielen Elementen von M den Wert 0_R annehmen, zusammen mit punktweise definierter Addition und der wie folgt zu definierenden Multiplikation:

$$(f : M \rightarrow R) \cdot (g : M \rightarrow R) := \left(M \rightarrow R, c \mapsto \sum_{\substack{a, b \in M \\ a+b=c}} f(a)g(b) \right).$$

Für $i \in I$ bezeichne $X_i: M \rightarrow R$ die Abbildung mit $X_i(i) = 1_R$ und $X_i(j) = 0_R$ für alle $j \in I \setminus \{i\}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

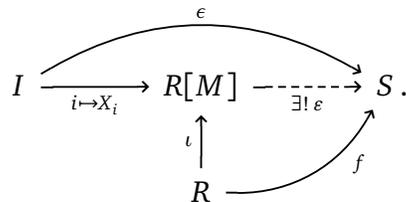
- (a) Das oben definierte Produkt $f \cdot g$ zweier Elemente $f, g \in R[M]$ ist tatsächlich ein Element von $R[M]$ und $R[M]$ bildet zusammen mit den hier definierten inneren Verknüpfungen einen kommutativen Ring. (Hinweis: alle Ringaxiome zu verifizieren wäre etwas lästig. Besprechen Sie nur eine repräsentative Auswahl nach eigenem Ermessen.)

(b) $\iota: R \rightarrow R[M], r \mapsto \begin{cases} M \rightarrow R, \\ a \mapsto \begin{cases} r & \text{falls } a = (i \mapsto 0), \\ 0_R & \text{sonst,} \end{cases} \end{cases}$
 ist ein Ringmonomorphismus.

- (c) Jedes $f \in R[M]$ lässt sich als $f = \sum_{a \in M} \iota(f(a)) \prod_{i \in I} X_i^{a(i)}$ schreiben.

(Die auftretenden Produkte haben stets höchstens endlich viele von $1_{R[M]} = X_i^0$ verschiedene Faktoren und die auftretende Summe nur höchstens endlich viele von $0_{R[M]}$ verschiedene Summanden und können somit betrachtet werden, ohne über Konvergenz sprechen zu müssen.)

- (d) Ist $f: R \rightarrow S$ ein Homomorphismus in einen beliebigen kommutativen Ring S und $\epsilon: I \rightarrow S$ eine beliebige Abbildung, so gibt es genau einen Ringhomomorphismus $\varepsilon: R[M] \rightarrow S$, welcher das folgende Diagramm kommutativ macht:



Bemerkung: man schreibt auch $R[X]$ statt $R[M]$ mit $X = \{X_i : i \in I\}$ und nennt $R[X]$ den **Polynomring** über R in den **Variablen** (oder **Unbestimmten/Veränderlichen**) X_i ($i \in I$). Eigentlich sind die hier diskutierten Objekte sehr konkret: etwa für $I = \{1, 2, 3, 4\}$ und $R = \mathbb{Z}$ ist ein typisches Element von $R[X]$ gleich $10X_1^0 + X_1^{20} + 60X_1^9X_2X_4^7$. Das Bild dieses Elements unter f aus Teil (d) wäre dann $f(10)\epsilon(1)^0 + \epsilon(1)^{20} + f(60)\epsilon(1)^9\epsilon(2)\epsilon(4)^7$.

Hinweis: Am Donnerstag, den 01.06.2023, entfällt die Vorlesung auf Grund einer Raumkollision. Ihre Lösungen können Sie am fraglichen Donnerstag zwischen 12:00 und 13:30 Uhr im Raum NT·02·018 in der Kopernikusgasse 24/II abgeben.