Technische Universität Graz
Institut für Analysis und Zahlentheorie
Marc Technau

Sommersemester 2023
Graz, den 01.06.2023

# 12. Übung zur Einführung in die Algebra

**12.1.** *(Polynome vs. Polynomfunktionen)* (4 Punkte)
Sei $R$ ein kommutativer Ring. Es bezeichne $\mathrm{PolyFun}(R) \subseteq \mathrm{Abb}(R,R)$ die Menge der Funktionen $R \to R$, welche durch Polynome gegeben sind (also $\epsilon_\bullet(R[X])$ in der Notation von § 7.2). Man hat die kanonische Einbettung $\iota\colon R \to \mathrm{PolyFun}(R)$, welche jedem $r \in R$ die konstante Abbildung $R \to R$, $a \mapsto r$, zuordnet. Wir sagen, $x \in \mathrm{PolyFun}(R)$ sei ***von variablem Typ***, falls die folgende Eigenschaft erfüllt ist (vgl. Satz 7.4):

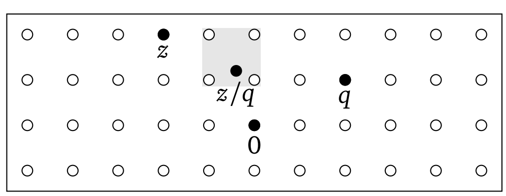
> Für jeden kommutativen Ring $S$, Ringhomomorphismus $f\colon R \to S$ und jedes $s \in S$ gibt es genau einen Ringhomomorphismus $\mathrm{PolyFun}(R) \to S$, welcher $x$ auf $s$ abbildet und das folgende Diagramm kommutativ macht:
>
> $$\begin{tikzcd} \mathrm{PolyFun}(R) \arrow[r, dashed, "\exists!", "x\mapsto s"'] & S\,. \\ R \arrow[u, "\iota"] \arrow[ur, bend right, "f"'] \end{tikzcd}$$

(a) Geben Sie ein Beispiel für einen Ring $R$ und ein Element $x \in \mathrm{PolyFun}(R)$ von variablem Typ an.

(b) Geben Sie ein Beispiel für einen Ring $R$ an, sodass es kein Element $x \in \mathrm{PolyFun}(R)$ von variablem Typ gibt.

**12.2.** *(Die ganzen Gaußschen Zahlen)*
Betrachten Sie $\mathbb{Z}[\mathrm{i}] = \{\, a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C} : a, b \in \mathbb{Z}\,\}$ zusammen mit der Funktion $N\colon \mathbb{Z}[\mathrm{i}] \to \mathbb{N}_0$, $a + \mathrm{i}b \mapsto (a+\mathrm{i}b)(a-\mathrm{i}b) = a^2 + b^2$ (mit $a, b \in \mathbb{Z}$). Zeigen Sie:

(a) Zu $z, q \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ mit $q \neq 0$ existieren $w, r \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ mit $z = wq + r$ derart, dass $r = 0$ oder $N(r) < N(q)$ gilt.

$\mathbb{Z}[\mathrm{i}] \subset \mathbb{C}$: 


(Bemerkung: dies ist ein Analogon zur Division mit Rest in $\mathbb{Z}$ oder bei Polynomen.)

(b) $(\mathbb{Z}[\mathrm{i}])^\times = \{-1, 1, -\mathrm{i}, \mathrm{i}\}$. Ist $(\mathbb{Z}[\mathrm{i}])^\times \cong C_4$ oder $(\mathbb{Z}[\mathrm{i}])^\times \cong C_2 \times C_2$?

Geben Sie Ihre Lösung bitte am 09.06.2023 zwischen 10:30 und 12:00 Uhr im Raum NT·02·018 ab.
`https://www.math.tugraz.at/~mtechnau/teaching/2023-s-einf-algebra.html`

**12.3.** *(Normen)*

Es sei $d \neq 1$ eine ***quadratfreie*** ganze Zahl, d.h. es gibt kein $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ mit $n^2 \mid d$. Mit $\sqrt{d}$ sei eine beliebige komplexe Nullstelle des Polynoms $X^2 - d$ bezeichnet. (Die zweite solche Nullstelle ist dann $-\sqrt{d}$.) Es sei $\vartheta = \sqrt{d}$ falls $d \equiv 2, 3 \bmod 4$ und $\vartheta = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{d})$ falls $d \equiv 1 \bmod 4$. (Der Fall $d \equiv 0 \bmod 4$ kann wegen Quadratfreiheit von $d$ nicht eintreten.) $\mathbb{Z}[\vartheta]$ bezeichne den kleinsten Teilring von $\mathbb{C}$, der $\mathbb{Z}$ und $\vartheta$ enthält. $\mathbb{Q}[\vartheta]$ sei analog definiert.

(a) Zeigen Sie $\vartheta \notin \mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}[\vartheta] = \{a + b\vartheta \in \mathbb{C} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ und $\mathbb{Q}[\vartheta] = \{a + b\vartheta \in \mathbb{C} : a, b \in \mathbb{Q}\}$.

(b) Bestimmen Sie für $a, b \in \mathbb{Z}$ die Darstellungsmatrix $A_{a+b\vartheta}$ der $\mathbb{Q}$-linearen Abbildung $\mathbb{Q}[\vartheta] \to \mathbb{Q}[\vartheta]$, $x \mapsto (a + b\vartheta)x$, bezüglich der $\mathbb{Q}$-Basis $1, \vartheta$ von $\mathbb{Q}[\vartheta]$.

(c) Zeigen Sie, dass $\det(A_{a+b\vartheta})$ für $a, b \in \mathbb{Z}$ eine ganze Zahl ist und die Abbildung $N : \mathbb{Z}[\vartheta] \to \mathbb{Z}$, $y \mapsto \det(A_y)$, multiplikativ ist (d.h. $N(xy) = N(x)N(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{Z}[\vartheta]$).

(d) Zeigen Sie: $x \in (\mathbb{Z}[\vartheta])^\times \Longleftrightarrow N(x) \in \mathbb{Z}^\times = \{\pm 1\}$.

**12.4.** *(Polynome und Nullstellen)* (4 Punkte)

Geben Sie ein Beispiel für einen kommutativen Ring $R$ und ein Polynom $f \in R[X] \setminus \{0_{R[X]}\}$ an, sodass $f$ unendlich viele verschiedene Nullstellen in $R$ besitzt.
(Hinweis: Sie können beispielsweise Polynomringe und Faktorbildung benutzen, um einen Ring $R$ mit vielen Nullteilern zu konstruieren.)

**Hinweis:** Am Donnerstag, den 08.06.2023, entfällt die Vorlesung (wg. Fronleichnam). Ihre Lösungen können Sie am Freitag, den 09.06.2023 zwischen 10:30 und 12:00 Uhr im Raum NT·02·018 in der Kopernikusgasse 24/II abgeben.