Technische Universität Graz
Institut für Analysis und Zahlentheorie
Marc Technau

Sommersemester 2023
Graz, den 08.06.2023

13. Übung zur Einführung in die Algebra

13.1. *(Lokalisierung)*
Betrachten Sie das multiplikative System $S = \{ 2^n : n \in \mathbb{N}_0 \}$ in $\mathbb{Z}$.

(a) Zeigen Sie: $S^{-1}\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] := \{ \frac{a}{2^n} \in \mathbb{Q} : a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_0 \}$.

(b) Bestimmen Sie alle Ideale von $S^{-1}\mathbb{Z}$.

(c) Bestimmen Sie den Quotientenkörper $\operatorname{Quot}(S^{-1}\mathbb{Z})$ von $S^{-1}\mathbb{Z}$.

13.2. *(Erweiterter Euklidischer Algorithmus)* (4 Punkte)

(a) (Aufwärmübung:) Benutzen Sie das in den Vorlesungsnotizen in § 8.1.2 beschriebene Verfahren, um aus dem nachstehenden Divisionsschema Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $24x + 7y = 1$ zu gewinnen:

$$\begin{cases} 24 = 3 \cdot 7 + 3, \\ 7 = 2 \cdot 3 + 1, \\ 3 = 3 \cdot 1 + 0. \end{cases}$$

(b) Wir schreiben $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ und $\overline{a} = a + 5\mathbb{Z}$. Finden Sie Polynome $f, g \in \mathbb{F}_5[X]$ mit

$$(X^5 + X^2 + \overline{2}X - \overline{1})f + (X^2 + \overline{1})g = \overline{1}.$$

(Ihr Rechenweg ist mit anzugeben und sollte sich an § 8.1.2 orientieren.)

(c) Es sei $\mathfrak{a} = \langle X^5 + X^2 + \overline{2}X - \overline{1} \rangle$. Folgern Sie aus (b), dass $(X^2 + \overline{1}) + \mathfrak{a} \in \mathbb{F}_5[X]/\mathfrak{a}$ invertierbar ist und geben Sie das zugehörige multiplikativ inverse Element an.

13.3. *(Irreduzibilität von Polynomen mit kleinem Grad)*
Sei R ein Integritätsbereich. Ein Element $p \in R \setminus (R^\times \cup \{0_R\})$ heißt ***irreduzibel***, falls jede Zerlegung $p = ab$ mit $a, b \in R$ automatisch $a \in R^\times$ oder $b \in R^\times$ erfüllt. K sei ein beliebiger Körper und $f \in K[X]$ ein Polynom mit Grad n.

(a) Ist $n = 1$, so ist f irreduzibel. (Hinweis: Gradformel, Proposition 7.2.)

(b) Ist $n \in \{2, 3\}$, so ist f genau dann irreduzibel, wenn f keine Nullstelle in K besitzt. (Hinweis: Wenn $f = ab$ mit Polynomen a, b gilt, welche Grade kommen dann für a und b in Frage?)

(c) Gilt $1_K + 1_K \neq 0_K$, so ist das quadratische Polynom $aX^2 + bX + c \in K[X]$ ($a, b, c \in K$, $a \neq 0_K$) genau dann irreduzibel, wenn seine ***Diskriminante*** $b^2 - 4ac$ kein Quadrat in K ist (d.h. wenn es kein $x \in K$ mit $x^2 = b^2 - 4ac$ gibt).

Geben Sie Ihre Lösung bitte am 15.06.2023 vor der Vorlesung ab.
https://www.math.tugraz.at/~mtechnau/teaching/2023-s-einf-algebra.html

(d) $3X^2+4X+3$ ist irreduzibel als Polynom über $\mathbb{Z}[\mathrm{i}\sqrt{5}]$, aber reduzibel als Polynom über $\mathbb{Q}[\mathrm{i}\sqrt{5}]$. (Hinweis: Bei $\mathbb{Q}[\mathrm{i}\sqrt{5}]$ handelt es sich sogar um einen Körper, wie man analog zu Aufgabe 8.4 sieht. Das dürfen Sie ohne Beweis benutzen.)

13.4. *(Längen von Zerlegungen in irreduzible Elemente)*
Es sei R ein Integritätsbereich und $R[X]$ der Polynomring über R in einer Variablen. $R[X^2,X^3]$ bezeichne den kleinsten Teilring von $R[X]$, der R, X^2 und X^3 enthält. Zeigen Sie:

(a) $R[X^2,X^3]=\left\{\sum_n a_nX^n \in R[X] : a_n \in R, \text{fast alle gleich } 0_R,\ a_1=0_R\right\}$.

(b) Die Elemente X^2 und X^3 sind beide irreduzibel in $R[X^2,X^3]$.

Hinweis: Bis zum **Dienstag**, den **13.06.2023**, läuft die Vorlesungs- und Übungsevaluierung für die *Einführung in die Algebra* (VO+UE). Bitte ziehen Sie in Erwägung, an dieser teilzunehmen.