Universität Paderborn
Institut für Mathematik
Marc Technau
Charly Schwabe

Sommersemester 2024
Paderborn, den 09.04.2024

1. Übung zur Linearen Algebra 2

1.1. *(Rang-Normalform)* (4 Punkte)

Gegeben seien die reellen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie den Rang von A.

(b) Gibt es invertierbare Matrizen $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $T \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit $SAT = D$?
Im Falle der Existenz, geben Sie ein derartiges Paar (S, T) an.
Anderenfalls beweisen Sie bitte, dass kein solches Paar existiert.

(c) Lösen Sie die Aufgabenstellung aus (b) mit $SAT = D'$ statt $SAT = D$.

1.2. *(Eine Differentialgleichung)* (4 Punkte)

Sei $V = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der reelle Vektorraum aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wir betrachten den Endomorphismus $f : V \to V$, $\varphi \mapsto \varphi''$, der jedem $\varphi \in V$ seine zweite Ableitung zuordnet. In dieser Aufgabe bestimmen wir den Eigenraum

$$\operatorname{Eig}(f, -1) = \{\, \varphi \in V : f(\varphi) = -\varphi \,\} = \{\, \varphi \in V : \varphi'' = -\varphi \,\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Sinus- und Cosinus-Funktion zwei linear unabhängige Elemente von $\operatorname{Eig}(f, -1)$ sind.

(b) Sei $\varphi \in \operatorname{Eig}(f, -1)$. Zeigen Sie, dass die durch

$$\psi_1(x) = \cos(x)\varphi(x) - \sin(x)\varphi'(x), \quad \psi_2(x) = \sin(x)\varphi(x) + \cos(x)\varphi'(x)$$

gegebenen Funktionen $\psi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\psi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konstant sind. (Hinweis: Bestimmen Sie ψ_1' und ψ_2' und benutzen Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung.)

(c) Folgern Sie $\operatorname{Eig}(f, -1) = \langle \sin, \cos \rangle$.

1.3. *(Nilpotente Endomorphismen)* (4 Punkte)

Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines K-Vektorraums V. Wir nennen f ***nilpotent***, falls es einen Exponenten $r \in \mathbb{N}$ gibt derart, dass $f^r = f \circ f \circ \ldots \circ f$ (r mal f) die Nullabbildung auf V ist.

Geben Sie Ihre Lösung bitte bis zum 16.04.2024, 16:00 Uhr, im zugehörigen PANDA-Kurs ab.
`https://panda.uni-paderborn.de/course/view.php?id=55381`

(a) Sei $v \in V$ ein Eigenvektor von f zum Eigenwert $\lambda \in K$ (d.h. $v \neq 0$ und $f(v) = \lambda v$). Zeigen Sie, dass $\lambda = 0$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass für einen nilpotenten Endomorphismus f der Eigenraum $\operatorname{Eig}(f, 0) = \{ v \in V : f(v) = 0 \}$ zum Eigenwert 0 stets vom Nullraum verschieden ist, sofern V nicht schon selbst der Nullraum ist.

(c) Geben Sie explizit drei nilpotente Endomorphismen $f : K^3 \to K^3$ an, welche belegen, dass $\dim \operatorname{Eig}(f, 0)$ jeden der Werte 1, 2 und 3 annehmen kann.

1.4. *(Rechenbeispiel zu Eigenwerten)* (4 Punkte)

Gegeben sei die folgende Matrix reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte von A.
Hinweis: Sie dürfen hierzu Korollar 6.1.11. aus dem Skript zur Linearen Algebra 2 von Hans Franzen benutzen.

(b) Berechnen Sie die zu den Eigenwerten gehörigen Eigenräume.

(c) Sei $S \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ eine Matrix, deren Spalten aus Basisvektoren der verschiedenen Eigenräume besteht. Berechnen Sie $S^{-1}AS$.