UNIVERSITÄT PADERBORN
Sommersemester 2024
Paderborn, den 16.04.2024

Universität Paderborn
Institut für Mathematik
Marc Technau
Charly Schwabe

2. Übung zur Linearen Algebra 2

2.1. *(Lineare Rekursionen)* (4 Punkte)
Wir betrachten die durch $G_0 = 0$, $G_1 = 1$ und $G_{n+1} = -2G_n + 2G_{n-1}$ (für $n = 1, 2, \ldots$) rekursiv definierte (reelle) Folge.

(a) Geben Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ an, sodass $\begin{pmatrix} G_{n+1} \\ G_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} G_1 \\ G_0 \end{pmatrix}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Ist die Matrix A durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmt? Begründen Sie Ihre Antwort!

(b) Zeigen Sie, dass A zwei reelle Eigenwerte $\lambda_+ > \lambda_-$ besitzt und bestimmen Sie jeweils einen zugehörigen Eigenvektor v_+ bzw. v_-.

(c) Zeigen Sie, dass die Matrix $T = (v_+, v_-) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, deren Spalten durch v_+ und v_- gegeben sind, invertierbar ist und berechnen Sie $T^{-1}AT$.

(d) Leiten Sie — in Anlehnung an die in der Vorlesung besprochene Binet-Formel für Fibonacci-Zahlen — eine Formel für G_n her.

2.2. *(Eigenvektoren und lineare Unabhängigkeit)* (4 Punkte)
Sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines K-Vektorraums V. Bei $v_1, \ldots, v_r$ handle es sich um Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten von f.

(a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $v_1, \ldots, v_r$ linear unabhängig sind.

(b) Belegen Sie anhand zweier Beispiele, dass Eigenvektoren zum selben Eigenwert eines Endomorphismus linear unabhängig sein können, dies aber nicht sein müssen.

2.3. *(Verschiebungsoperator)* (4 Punkte)
Sei K ein Körper. Wir betrachten den Vektorraum $V = K[X]^{\leq 2}$ aller Polynome über K mit Grad ≤ 2. (Für Details konsultieren Sie § 6.2 im Skript von Hans Franzen bis einschließlich Lemma 6.2.7.) Ferner betrachten wir die Abbildung $f\colon V \to V$, welche jedes Polynom $g = \sum_i a_i X^i \in V$ auf $g(X+1) = \sum_i a_i (X+1)^i$ abbildet.
(Achtung: Die linke Seite der letzten Gleichung ist als „g ausgewertet bei $X+1$“ und nicht etwa as „g mal $X+1$“ zu lesen.)

(a) Bestimmen Sie die Dimension von V.

(b) Weisen Sie nach, dass f linear ist.

(c) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von f und die zugehörigen Eigenräume.
(Achtung: Beachten Sie bei Ihren Überlegungen, dass es Körper K gibt, in denen $1 + 1 = 0$ gilt, zum Beispiel $K = \mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.)

Geben Sie Ihre Lösung bitte bis zum 23.04.2024, 16:00 Uhr, im zugehörigen PANDA-Kurs ab.
`https://panda.uni-paderborn.de/course/view.php?id=55381`

2.4. *(Nullabbildung)* (4 Punkte)

Sei K ein endlicher Körper. Finden Sie ein Polynom $f \in K[t]$ mit $f \neq 0$, so dass die polynomiale Abbildung $\tilde{f}: K \to K$, $x \mapsto f(x)$, die Nullabbildung ist. (Für Details siehe § 6.2.2 im Skript von Hans Franzen.)