UNIVERSITÄT PADERBORN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Marc Technau
Charly Schwabe

Sommersemester 2024
Paderborn, den 23.04.2024

3. Übung zur Linearen Algebra 2

3.1. *(Formale Ableitung)* (4 Punkte)

Sei K ein Körper und $V = K[X]^{\leq 3}$ der K-Vektorraum aller Polynome f über K mit $\deg f \leq 3$. Für ein Polynom $f = \sum_{n\geq 0} a_n X^n \in K[X]$ definieren wir seine ***formale Ableitung*** $f' \in K[X]$ als $f' = \sum_{n\geq 1} n a_n X^{n-1}$ Wir betrachten die Abbildung

$$D\colon V \to V, \quad f \mapsto f'.$$

(a) Zeigen Sie, dass D linear ist und bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $M_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(D)$ von D bezüglich der geordneten Basis $\mathscr{B} = (X^0, X^1, X^2, X^3)$ von V.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenräume von D für $K = \mathbb{R}$.

(c) Was ändert sich an der Lösung zu (b), wenn man $K = \mathbb{F}_2$ betrachtet?

3.2. *(Polynomdivision)* (4 Punkte)

Wir betrachten Polynome über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_2$. Bestimmen Sie für die in den Teilaufgaben spezifizierten g und für $f = X^2 + X + 1$ jeweils Polynome $q, r \in \mathbb{F}_2[X]$, sodass $g = qf + r$ ist und $\deg(r) < 2$ gilt.

(a) $g = X^5$.

(b) $g = X^6 + X^5 + X^4 + X^3$.

(c) $g = X^7 + X^6 + 1$.

(d) $g = X^8$.

(e) $g = X^8 + X^7 + X^6 + X^5 + X^3 + X$.

(f) $g = X^9 + X^5 + X^4 + X^3$.

3.3. *(Restklassenkörper)* (4 Punkte)

Sei $f := X^2 + X + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$. Wir betrachten die Relation $\sim$ auf $\mathbb{F}_2[X]$ definiert durch $g_1 \sim g_2$ genau dann, wenn es ein $h \in \mathbb{F}_2[X]$ gibt mit $g_1 = g_2 + hf$.

(a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Bestimmen Sie die Anzahl der Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$ und geben Sie jeweils einen Repräsentanten dieser Restklassen an. (Hinweis: Satz 6.2.8.)

(c) Für $g_1, g_2, \bar{g_1}, \bar{g_2} \in \mathbb{F}_2[X]$ gelte $g_1 \sim g_2$ und $\bar{g_1} \sim \bar{g_2}$. Zeigen Sie, dass dann auch $g_1 + \bar{g_1} \sim g_2 + \bar{g_2}$ und $g_1\bar{g_1} \sim g_2\bar{g_2}$ gilt.

Geben Sie Ihre Lösung bitte bis zum 30.04.2024, 16:00 Uhr, im zugehörigen PANDA-Kurs ab.
`https://panda.uni-paderborn.de/course/view.php?id=55381`

(d) Geben Sie mithilfe der Repräsentanten aus Aufgabenteil (b) eine Additions- und eine Multiplikationstafel für die $\sim$-Restklassen an.

3.4. *(Zerlegung in $K[X]$)* (4 Punkte)

Sei K ein Körper und $K[X]$ der zugehörige Polynomring.

(a) Zeigen Sie: für $f, g, h \in K[X]$ mit $h \neq 0$ folgt aus der Gleichung $f \cdot h = g \cdot h$ bereits $f = g$. (Hinweis: Benutzen Sie die Gradformel.)

(b) Belegen Sie durch ein Beispiel, dass aus der allgemeineren Gleichung $f \cdot h = g \cdot p$ für Polynome $f, h, g, p \in K[X]$ mit $g, p \neq 0$ nicht $f = g$ zu folgen braucht.

(c) Für $m, n \in \mathbb{N}$ gelte im Polynomring $K[X]$ die Gleichung

$$(X - x_1) \cdots (X - x_m) = (X - y_1) \cdots (X - y_n)$$

für gewisse $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$. Zeigen Sie, dass $m = n$ gilt und es eine Permuation $\sigma \in S_m$ gibt derart, dass $x_i = y_{\sigma(i)}$ für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$ gilt.
(Hinweis: Zeigen Sie zunächst $m = n$. Führen Sie anschließend einen Induktionsbeweis über m. Zeigen Sie, dass x_m als ein y_r vorkommt und benutzen Sie (a).)