UNIVERSITÄT PADERBORN

Sommersemester 2024
Paderborn, den 30.04.2024

UNIVERSITÄT PADERBORN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Marc Technau
Charly Schwabe

4. Übung zur Linearen Algebra 2

4.1. *(Eigenwerte von AB und BA)* (4 Punkte)
Bei A und B handle es sich um $n\times n$-Matrizen über einem Körper K. Bezeichne die $n\times n$-Einheitsmatrix mit E_n und die $n\times n$-Nullmatrix mit 0_n.

(a) Zeigen Sie die folgende Gleichung von $2n\times 2n$-Matrizen (in Blockschreibweise):

$$\begin{pmatrix} AB & 0_n \\ B & 0_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_n & A \\ 0_n & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & A \\ 0_n & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0_n & 0_n \\ B & BA \end{pmatrix}.$$

(b) Zeigen Sie, dass AB und BA dieselben Eigenwerte besitzen.
(Hinweis: Benutzen Sie (a) und Lemma 5.3.12 aus dem Skript von Hans Franzen.)

(c) Belegen Sie durch ein Beispiel, dass die Dimensionen der Eigenräume von AB und BA (jeweils zu demselben Eigenwert) verschieden sein können.
(Hinweis: Es genügt, nach einem Beispiel in $\mathbb{Q}^{2\times 2}$ zu suchen.)

4.2. *(Spur)* (4 Punkte)
Die ***Spur*** $\operatorname{tr} A$ einer $n\times n$-Matrix A über einem Körper K ist gegeben durch die Summe der Diagonaleinträge von A:

$$\operatorname{tr}\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} := \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + \ldots + a_{nn}.$$

(a) Zeigen Sie $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ für alle $A, B \in K^{n\times n}$.

(b) Belegen Sie durch ein Beispiel, dass die Gleichung $\operatorname{tr}(ABC) = \operatorname{tr}(BAC)$ im Allgemeinen nicht für alle $A, B, C \in K^{n\times n}$ gilt.

(c) Zeigen Sie $\operatorname{tr}(T^{-1}AT) = \operatorname{tr}(A)$ für alle $A \in K^{n\times n}$ und $T \in \mathrm{GL}_n(K)$.

($\star$) *(Diese Teilaufgabe ist zur Diskussion in den Übungen gedacht und wird nicht bewertet.)*
Betrachten Sie die folgende Aussage: *„Die Spur einer Matrix aus $K^{n\times n}$ ist die Summe der Eigenwerte jener Matrix.“* Überlegen Sie sich, in wie fern diese Aussage als richtig oder falsch interpretiert werden kann. Überprüfen Sie Ihre Interpretation anhand der folgenden vier Matrizen über $\mathbb{Q}$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie Ihre Lösung bitte bis zum 07.05.2024, 16:00 Uhr, im zugehörigen PANDA-Kurs ab.
`https://panda.uni-paderborn.de/course/view.php?id=55381`

4.3. *(Invarianter Unterraum)* (4 Punkte)

Sei $V := \mathbb{R}[X]^{\leq 4}$ der Vektorraum aller reellen Polynome von Grad höchstens 4 und sei außerdem $U := \mathbb{R}[X]^{\leq 2} \subset V$ der Unterraum von V bestehend aus Polynomen von Grad höchstens 2. Wir betrachten die lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$, definiert durch $\varphi(f) = f'$, die jedem Polynom f seine formale Ableitung zuordnet (siehe Aufgabe 3.1).

(a) Gegeben sei die Basis $\mathscr{B}_U = (f_1, f_2, f_3)$ von U mit $f_1 = (X+1)^2$, $f_2 = X+1$ und $f_3 = X^2 + 2X$. Ergänzen Sie $\mathscr{B}_U$ zu einer Basis $\mathscr{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$ von V.

(b) Zeigen Sie, dass $\varphi(U) \subseteq U$ gilt.

(c) Berechnen Sie die Darstellungsmatrix $M_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(\varphi)$.

(d) Sei $W = \langle f_4, f_5 \rangle$. Gilt auch $\varphi(W) \subseteq W$?

4.4. *(Charakteristische Polynome)* (4 Punkte)

(a) Berechnen Sie für die nachfolgenden Matrizen $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ jeweils das charakteristische Polynom χ_{A_i}.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 6 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Sei $A = (A_{ij})_{i,j=1}^n \in K^{n\times n}$ eine $n \times n$ Matrix über einem Körper K für eine natürliche Zahl $n \geq 2$. Wir schreiben das charakteristische Polynom $\chi_A \in K[t]$ in der Form

$$\chi_A = \sum_{i=0}^{n} c_i t^i$$

mit $c_0, \ldots, c_n \in K$. Zeigen Sie die Identitäten

- $c_n = 1$,
- $c_{n-1} = -\operatorname{tr}(A) := -\sum_{i=1}^{n} A_{ii}$,
- $c_0 = (-1)^n \det(A)$.