UNIVERSITÄT PADERBORN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Marc Technau
Charly Schwabe

Sommersemester 2024
Paderborn, den 07.05.2024

5. Übung zur Linearen Algebra 2

5.1. *(Nullstellenordnung)* (4 Punkte)

Sei K ein Körper. Für $p, f \in K[X]$, $\deg p > 0$, $f \neq 0$, definieren wir

$$\nu_p(f) := \max\{\, \nu \in \mathbb{N}_0 : \exists g \in K[X] \colon p^\nu \cdot g = f \,\}.$$

Für $\lambda \in K$ ist dann $\nu_{X-\lambda}(f) = \nu(f, \lambda)$ die aus der Vorlesung bekannte Nullstellenordnung von λ bezüglich f.

(a) Zeigen Sie: $\nu(f \cdot h, \lambda) = \nu(f, \lambda) + \nu(h, \lambda)$ für $f, h \in K[X] \setminus \{0\}$.

(b) Finden Sie Polynome $p, f, h \in K[X]$, $\deg p > 0$, $f, h \neq 0$, mit $\nu_p(f \cdot h) \neq \nu_p(f) + \nu_p(h)$. (Bemerkung: (b) zeigt, dass die Formel aus (a) nicht ganz offensichtlich ist.)

(c) Studieren Sie den Beweis von Satz 6.4.7, so wie er im Skript steht. An welcher Stelle wird dort implizit auf ein Ergebnis wie aus (a) zurückgegriffen und wie kann man jenen Schritt mittels (a) rechtfertigen?

5.2. *(Simultane Diagonalisierbarkeit)* (4 Punkte)

Wenden Sie Algorithmus 6.5.3 an, um die folgenden beiden Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ simultan zu diagonalisieren:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(Hinweis: Gesucht ist also eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ derart, dass $S^{-1}AS$ und $S^{-1}BS$ beide Diagonalgestalt haben. Sie dürfen davon ausgehen, dass $AB = BA$ gilt.)

5.3. *(Skalarprodukt: Beispiele und Nicht-Beispiele)* (4 Punkte)

Sei $n \geq 3$ eine natürliche Zahl. Wir betrachten die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Geben Sie Ihre Lösung bitte bis zum 15.05.2024, 16:00 Uhr, im zugehörigen PANDA-Kurs ab.
https://panda.uni-paderborn.de/course/view.php?id=55381

Beweisen oder widerlegen Sie, dass die in den Teilaufgaben angegebenen Abbildungen Skalarprodukte sind:

(a) $\langle \_, \_ \rangle_A \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\langle v, w \rangle := v^{\mathrm{T}} A w$;

(b) $\langle \_, \_ \rangle_B \colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\langle v, w \rangle := v^{\mathrm{T}} B w$;

(c) $\langle \_, \_ \rangle_{\mathrm{C}} \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\langle (v_1, \ldots, v_n), (w_1, \ldots, w_n) \rangle := v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$;

(d) $\langle \_, \_ \rangle_{\mathrm{D}} \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\langle v, w \rangle := \begin{cases} 1 & \text{falls } v = w, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

5.4. *(Ein Algorithmus)* (4 Punkte)

Sei $\langle \_, \_ \rangle \colon V \times V \to \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V. Außerdem handle es sich bei $(v_1, \ldots, v_n)$ um eine linear unabhängige Familie in V. Dann definieren wir die Familie $(w_1, \ldots, w_n)$ iterativ auf die folgende Weise:

$$w_j := v_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\langle w_i, v_j \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} w_i$$

für $j = 1, \ldots, n$, also:

$$\begin{cases} w_1 := v_1, \\ w_2 := v_2 - \dfrac{\langle w_1, v_2 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1, \\ w_3 := v_3 - \dfrac{\langle w_1, v_3 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \dfrac{\langle w_2, v_3 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2, \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ddots \\ w_n := v_n - \dfrac{\langle w_1, v_n \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \dfrac{\langle w_2, v_n \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 - \ldots - \dfrac{\langle w_{n-1}, v_n \rangle}{\langle w_{n-1}, w_{n-1} \rangle} w_{n-1}. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass für alle $j = 1, \ldots, n$ gilt $\operatorname{span}_{\mathbb{R}}(v_1, \ldots, v_j) = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(w_1, \ldots, w_j)$. Folgern Sie induktiv, dass tatsächlich $\langle w_i, w_i \rangle > 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt (und wir daher durch $\langle w_i, w_i \rangle$ teilen dürfen).

(b) Zeigen Sie, dass für alle $i, j = 1, \ldots, n$ mit $i \neq j$ gilt $\langle w_i, w_j \rangle = 0$.
Hinweis: Überlegen Sie, warum es reicht die Aussage für alle $1 \leq i < j \leq n$ zu beweisen. Gehen sie dann per Induktion nach j vor.

(c) Sei nun $\langle \_, \_ \rangle \colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\langle v, w \rangle := v^{\mathrm{T}} w$, das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ und sei (v_1, v_2, v_3) gegeben durch

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

Berechnen Sie entsprechend des obigen Algorithmus (w_1, w_2, w_3).